BIBLIOTECA DELLA R. SCUOLA D'APPLIC. DEGL' INGEGNERI
ROMA
Num. d'inv. 5725
Formato
Scaffale
Palchetto
LIBRERIA STEFANUCCI

DIPARTIMENTO DI MATEMATICA
"G. CASTELNUOVO"
BIBLIOTECA
FONDO ANTICO
1700
B
43/3
UNIVERSITA' DI ROMA
"LA SAPIENZA"

Digitized by Google

DOP 1429

ELEMENTORUM
UNIVERSÆ MATHESEOS

AUCTORE

P. ROGERIO JOSEPHO BOSCOVICH
SOCIETATIS JESU
PUBLICO MATHESEOS PROFESSORE.

TOMUS III.

Inv. 5253-B

CONTINENS

SECTIONUM CONICARUM ELEMENTA

Nova quadam methodo concinnata

ET DISSERTATIONEM

DE TRANSFORMATIONE

LOCORUM GEOMETRICORUM

Ubi de Continuitatis lege, ac de quibuſdam Infiniti Myſteriis.

R. SCUOLA DEGLI INGEGNERI ROMA
BIBLIOTECA

ROMÆ MDCCLIV.
PROSTANT APUD [illegible]
[illegible]

AUCTORIS PRÆFATIO

SEctionum Conicarum Elementa promiſeram jam a pluribus annis, ac pluribus in locis, nova quadam methodo ex generali definitione deducta, ac in Romano Litteratorum diario ad annum 1746 *extat ſchediaſma breviſſimum, quo ex eadem illa definitione demonſtratur in primis ratio conſtans inter bina rectangula ſegmentorum binarum chordarum Sectionis Conicæ cujuſvis habentium inclinationem conſtantem, & ſe invicem ſecantium; tum partim ex eo theoremate, partim iterum ex ipſa definitione præcipua omnia, quæ ad ejuſmodi curvas pertinent, derivantur.*

Id quidem argumentum plus quam decies ego ſane orditus ſum in Auditorum meorum gratiam, neque unquam impetrare potui a me ipſo, ut ordinem, quem ſemel ſuſceperam, tenerem, ac porro pergerem; ſed novam quandam viam, quamvis ab eadem definitione digreſſus, inii ſemper, & ſæpe etiam fere uſque ad exitum tenui. Ex altera enim parte admirabilis quidam inter geometricas veritates nexus, ut in intricatiſſimo quodam labyrinto, mille ad eundem exitum diverſos offerebat tramites: ex altera vel brevioris, vel expeditio-

ris itineris oborta ſpes tædium quoddam jam tolerati laboris induxerat.

Et ſane hæſiſſem diutius, niſi ſuperiore anno graviſſimum acceſſiſſet ad maturandam editionem incitamentum.. Conſcripſeram ego quidem latino ſermone jam ab anno 1737 in uſum nobilis adoleſcentis, quem geometricis ſtudiis initiandum ſuſceperam, breve quoddam Geometriæ planæ compendiolum, quam ad 14 propoſitionum ſumma veluti capita redegeram, adjectis corollariis nonnullis, & ſcholiis ita, ut propoſitionibus quidem, & corollariis aperte contineretur, vel fere ſponte inde flueret, ac facillime deduci poſſet, quidquid ad cæteras facultates mathematicas, vel Phyſicas ex ipſa Geometria requiritur, in ſcholiis autem uſus haberentur nonnulli eorum, quæ pertractata jam fuerant, quibus Tyronis animus incitaretur, & eorum fructuum, quos olim ex ipſa Geometria percepturus eſſet, jam aliquam voluptatem præciperet. Haud ita multo poſt Italico ſermone breve itidem Arithmetices compendiolum exaraveram in aliorum quorundam uſum, ubi primo capite præcepta præcipua, quæ ad computationem pertinerent, indicaveram tantummodo, ſecundo proportiones, ac argumentandi modos, tertio progreſſiones, ac logarithmos aliquanto diligentius perſecutus eram, demonſtrationibus, in iis, quæ ad computationem pertinebant, plerumque omiſſis, in reliquis ſummo ſemper cum rigore deductis. Compendioſa itidem Trigonometriæ ſphæricæ elementa Romanæ Tacquetianorum Elementorum editioni inſerueram, quæ ſimplicitate quadam, &

ordine ſe commendabant, nec omnino improbabantur.

Dum Geographiæ corrigendæ cauſa, & Meridiani accuratius per Pontificiam ditionem traducti menſurandorum graduum, ditionem ipſam percurrerem itinere per ſummos montes laborioſiſſimo; & ab amicis, & ab iis, quibus ut paream, mihi ob ipſam inſtituti mei rationem religio eſt, per litteras inductus ſum, ut eorum editionem permitterem tanquam exordium quoddam Elementorum univerſæ Matheſeos, adjectis iis, quæ neceſſaria viderentur. Ipſum autem Geometriæ planæ compendium illud meum, ejus diſceſſu, in cujus gratiam conſcriptum fuerat, jam tum amiſeram, quod extabat ab alio Italice redditum, unde iterum ab Editore latinitate donatum fuerat, & idem Arithmeticæ quoque compendium in latinum ſermonem converterat, quibus in verſionibus mutationes etiam extiterant nonnullæ, uti fit, aliis etiam quandoque adjectis, omiſſis aliis arbitrio interpretum. Interea vero Editor mihi amiciſſimus Geometriæ Solidorum compendium, & Planam Trigonometriam, ac Algebræ finitæ elementa a me ipſo urgentiſſimis litteris expoſcebat.

Itaque ipſa Elementa ſolidorum in medio itinere conſcripta Romam tranſmiſi, ſatis, ni fallor, & expedita, & perſpicua, & vero ſimul etiam copioſa. Trigonometriæ autem ſphæricæ illi parum admodum mutatæ planam adjeci, quæ in unum cum ea veluti corpus coaleſceret. Et ſane utriuſque elementa adeo paucis innituntur principiis, & tam expedita methodo, ac tam continua, & ne-

ceſſaria deductione ſunt concinnata, ut in iis, ſi iterum etiam edenda eſſent, nihil fere ſit, quod mutatum velim, ſive ordinem ſpectem, ſive demonſtrationum textum. Atque ea quidem omnia cum ad Urbem veniſſem, redeundum enim erat identidem, impreſſa inveni, quibus omnino addendam cenſui appendicem quandam aliquanto fuſiorem ad calcem, qua quædam, quæ ad Geometriam illam, & Arithmeticam neceſſaria cenſebam, continerentur. In ea demonſtrationes, quæ deerant, ſupplentur paſſim; ac uberrima theorematum omnium elementarium ſeges colligitur, indicaturque, quo ordine, qua ratione ex iis ſolis 14 Geometriæ propoſitionibus vel 12 potius, (nam binæ ad proportiones ſecundo Arithmeticæ capite uberius pertractatas pertinent), quidquid ad Elementarem Geometriam requiritur, deducendum ſit, ac plura innuuntur problemata Tyroni exercendo aptiſſima.

In hac appendice continentur ea, quæ meis ego quidem Tyronibus viva voce inſinuare conſueveram, vel in quibus eoſdem exercebam, quæ ſane ad Goometriam addiſcendam cum fructu ſummæ arbitror utilitatis. Obruitur plerumque Tyronis animus rerum diſparatarum multitudine, dum ea omnia, quæ ad elementa pertinere poſſunt, unico velut hiatu percurrit; ac licet ſingula perquam facile arripiat, rerum ſummam, ac admirabilem quemdam nexum non tenet. Hinc utiliſſimum fore arbitratus ſum, ſi ad præcipua quædam capita tota hæc tam ampla materies redigeretur, quæ ſine aliorum adjumento ſuſtinerent ſeſe,

ex

ex quibus autem, ut ex primariis quibuſdam fontibus, cætera omnia facile deducerentur. Ubi illa Tyro perſpexerit, & totius ædificii quoddam veluti e trabibus compactum fulcimentum habuerit, tum reliqua illa cum longe majore fructu adiiciet, in quibus deducendis ſi vires primum ſuas experiatur, tum ubi impares ſenſerit, Præceptoris opem imploret, næ ille & ad inventionem, neceſſariam ſane, ſed raram admodum, viam ſibi ſternet expeditiſſimam. Illud enim omnino mihi perſuaſum eſt, idcirco tam paucos prodire Geometras, qui nova invenire poſſint, vel propoſitorum theorematum demonſtrationes ſupplere, licet tam multi Geometricis ſtudiis operam navent, & multi itidem ad aliorum inventa percipienda deveniant; quod ubi primum ſe ad Geometriam addiſcendam applicuerunt, explicata omnia, ac diſerte deducta repererint, nullo aut inventioni, aut deductioni relicto loco, quo acueretur induſtria, & exercitatio mentem excoleret. Verum ad eam hujus diſciplinæ rationem ductore eſt opus exercitato, qui noverit ejuſmodi inſinuare notitias, quas ad inventionem pro Tyronis captu ſatis fore cenſuerit; quæ ſi adhuc ipſum, quo tendit, nequaquam perduxerint; ita ipſi reliqua paulatim addat; ut ſemper itidem relinquat aliquid, quod demum per ſe ipſe inferat, quo nimirum ille tamquam invento ſuo, gratulabitur ſibi, & ingentem inde voluptatem percipiet. Et hæc quidem de appendice illa, de qua in ipſa prima libri fronte, ac Editoris præfatione, quæ nimirum impreſſa jam fuerant, nulla tum quidem injecta eſt mentio.

Dum hæc ederentur, Algebræ Elementa expoſcebantur. Ea ex Vrbe iterum digreſſo conſcribenda fuerunt partim in itinere, partim Arimini, ubi diutius ob plures obſervationes ibidem inſtitutas ſum commoratus, unde ipſa elementa, ut efluebant e calamo, ita Romam tranſmittebantur edenda, in quibus ea omnia, quæ ad æquationum proprietates generales pertinent, ac ad tertium, & quartum gradum in primis, quæ ad variabiles formularum valores, ad earundem incrementa, & decrementa, ad maximorum, ac minimorum determinationem ſpectant, aliquanto accuratius, & fuſius ſum perſecutus, ac imaginariarum quantitatum uſum in radicibus æquationum gradus tertii, ex eadem unica formula eruendis protuli nec inutilem, ut arbitror, nec inelegantem. At quod ad illum, quem algorithmum vocant, ſive ad præcipuas computandi rationes pertinet, compendioſiore methodo, inſtitutionum more, quæ maxime neceſſaria videbantur, innui tantummodo, ac demonſtravi, exemplis ubique adjectis, ſed admodum paucis, plura Præceptoris arbitrio relinquens, qui ea pro Tyronis captu ſuggerat, & quæ opportuna videantur ad uberiorem rerum intelligentiam, ſuppleat viva voce.

Ea omnia jam prodierant ſine meo nomine, cum demum obſervationibus omnibus confectis Romam regreſſus, ac meo Matheſeos tradendæ muneri reſtitutus, ad Conicarum Sectionum elementa perficienda animum applicare coactus ſum, & ipſorum editionem maturare. Ita autem applicui, ut veteribus illis laboribus omnibus prætermiſſis novam

vam rurſum rationem inierim, & ab iis omnino diverſam veritatum ſeriem adornarim. Id autem aliquanto plus otii nactus in hoc mihi opere præſtandum in primis duxi, ut ſingula quam dilucide fieri poſſet, exponerem, nihil non accuratiſſime demonſtrarem per finitam Geometriam, quam unam hìc mihi adhibendam conſtitui, ita, ut quod ad Algebræ uſum in Conicis pertineret, eo reſervarem, ubi de ipſius Algebræ applicatione ad Geometriam agendum erit. Nexum autem quemdam in primis, & deductionis ordinem ita rerum naturæ conſentaneum perſecutus ſum; ut inde manifeſto apparere poſſet, ipſa Geometria duce ex aſſumpta definitione ad proprietates omnes neceſſario deveniri, quæ latere nequeant inquirentem, licet earum omnino ignarus ad hunc ordinem contemplationis accedat, Atque id quidem ita me aſſecutum eſſe arbitror, ut quicumque ſatis in Geometria peritus ad hæc elementa percurrenda animum applicuerit, per ſe ipſe ſine ductore ullo & theorematum demonſtrationes omnes admodum facile aſſequi poſſit, & ordinem ipſum, ac nexum perſpicere, cujus vi per ſeſe iterum eodem ingreſſus calle eadem poſſit vel problemata ſibi ſolvere, vel demonſtrare theoremata, & eamdem præcipuarum veritatum ſeriem contexere. Eam ob cauſam illum ipſum ordinem, quem in eo ſchediaſmate propoſueram, immutavi plurimum, & quod ibi ex ipſa definitione theorema deduxeram primum, hìc ad ſextam propoſitionem rejectum eſt, ut generalis cujuſdam conſtructionis fructus præcipuus quidem, ſed qui alios ante ſe plurimos, ex eadem itidem profluen-

ſluentes, haberet, qui prætermittendi, ac differendi non eſſent. Ordinem autem hunc ipſum novum, quem reliquis præferendum cenſui, præcipua, quæ congeſſi, quæ ſcholiis interjectis adjeci, quæ in fuſiore diſſertatione ad calcem addita pertractavi, hìc quam breviſſime fieri poterit, perſtringam.

In primis curvas haſce conſiderandas mihi duxi non in cono ipſo, a quo nomen habent, cum ſolidorum conſideratio multo complicatior ſit, & multo majorem vim imaginationis requirat, ſed in plano poſitas, quod & alii præſtiterunt ſane multi. Definita autem earum forma, & proprietatibus plurimis in ipſo plano deductis, tum demum ad Coni, Cylindri, Conoidum ſectiones gradum feci, quæ ita multo expeditiores evadunt.

Eam igitur Sectionis Conicæ perimetrum appellavi (nihil enim refert, ſi interea quamcumque nominis, ad arbitrium aſſumpti, definitionem uſurpes, undecumque id nomen fluxerit, ac nominis ipſius derivationem alio reſerves), in qua puncti cujuſvis diſtantia a dato quodam puncto, quod Focus *dicitur, ad diſtantiam a data quadam recta, quam* Directricem *appellavi, ſit in ratione data, quæ ut eſſet minoris inæqualitatis, æqualitatis, vel majoris inæqualitatis, ad Ellipſim, Parabolam, vel Hyperbolam perimeter pertineret, ubi illud accidit ſatis ad rem appoſitè, ut defectus, æqualitas, & exceſſus, qui iis ipſis curvis Græco vocabulo id nomen jam olim dederant in communi methodo ex longe alia proprietate petitum, in hac mea ex ipſa definitione penderent.*

Mira ſane atque incredibilis eſt ejus definitionis

*tionis ubertas, atque fæcunditas, qua, ut in adjecta diſſertatione demonſtravi num.*766, *omnis hæc tractatio ad unicum problema reducitur, quo ex datis foco, directrice, ratione illa data, datæ rectæ concurſus cum perimetro inquiritur; cujus problematis ſolutio rite ad caſus omnes applicata, vel immediate per ſeſe, vel ex iis, quæ inde primo deducta ſunt, omnes exhibet harum curvarum proprietates, quas ad* 9. *propoſitiones redegi. Priores tres tria problemata continent* (*num.*34, 128, 140) *& definiunt concurſum perimetri cum recta quavis directrici parallela, cum tranſeunte per focum, cum habente directionem quamcumque, cujus tertii problematis conſtructio generalis ſatis elegans, & fæcundiſſima, cum in prioribus binis caſibus falleret, bina illa coegit præmittere ſingularia problemata, minus illa quidem fæcunda, at ad naturam, & varias trium curvarum formas determinandas, ſiſtendas animo, & vero etiam delineandas, atque oculis proponendas aptiſſima. Reliqua ſunt theoremata e tertio problemate derivata. Quarta propoſitio* (*num.* 181) *focorum proprietatem effert, quæ iis nomen dedit, ab æqualitate angulorum cum tangente petitum, quinta* (*num.* 206) *diametros exhibet ſecantes bifariam ordinatas ſuas. Sexta* (*num.*299) *enunciat theorema illud generale conſtantis rectangulorum rationis, de quo mentio ſuperius injecta eſt. Et ea quidem tria theoremata ab ipſo tertio problemate ſingula per ſeſe immediate deducuntur. Ex eorum autem poſtremo potiſſimum alia bina proveniunt. Septima nimirum propoſitio complectitur*

num,

Digitized by Google

(num. 351.) relationem quadrati ſemiordinatæ cujuſvis diametri ad rectangulum ſub abſciſſis, vel ad abſciſſam unicam in Parabola, & latus rectum. Octava (num. 397) proportionem quandam armonicam rectæ e binarum tangentium concurſu ductæ, & occurrentis perimetro bis, ac rectæ contactus jungenti ſemel; cujus quidem theorematis mira eſt ſane, atque incredibilis fæcunditas. Ex ſeptima propoſitione nona deducitur (num. 495) quæ itidem ex illa ſexta deduci immediate poſſet, & illam èxponit quadrati ſemiordinatæ relationem ad latus rectum, & abſciſſam, quæ apud Veteres Ellipſeos, Parabolæ, Hyperbolæ nomen dedit; quæ quidem propoſitio viam ſtravit ad demonſtranda accuratiſſime per finitam Geometriam, quæcumque ad circulos Conicarum Sectionum oſculatores pertinent, quos pluribus corollariis diligentiſſime ſum perſecutus.

Et quidem propoſitionibus omnibus corollaria adjecta ſunt plurima, quibus ſingulis ſæpe ingens theorematum numerus, & ex propoſitionibus ipſis, & ex ſe mutuo confertim prorumpentium continetur. Habet definitio ipſa Corollaria 5, propoſitio prima 4 ſua, & cum novis definitionibus conjuncta alia 20: ſecunda propoſitio tantummodo 2, multa enim ex iis, quæ prima exbibuit, ex ea itidem deduci poſſent: tertia 9, nam reliqua omnia; quæ conſequuntur ad finem uſque pro ejus corollariis baberi poſſunt; primum autem ejuſdem corollarium tam multa ſimul theoremata continet ex diverſis caſuum conditionibus derivata pariter (num. 49), ut ſoli enunciationi vix integra pagina

gina ſuffecerit: quarta 7: *quinta* 22, *quibus inprimis ea omnia continentur, quæ ad Hyperbolarum aſymptotos ſpectant: ſexta* 13: *ſeptima* 12: *octava reliquis fæcundior* 28: *nona demum* 10 *ad circulos oſculatores potiſſimum pertinentia.*

Corollariis immixta ſunt ſcholia ſane multa ſunt enim numero 44, *quibus vel, quæ maxime notatu erant digna, adnotarentur, vel quæ cum earumdem curvarum proprietatibus copulata ad Geometriam generaliter pertinerent, pertractarentur, vel quibus ordo deductionis indicaretur, quod in tanta fæcunditate, in tanto veritatum nexu neceſſarium omnino extitit. Illud enim res ita arcte inter ſe copulatas, & pendentes a ſe invicem litteris conſignaturo accidit perquam incommodum, quod, licet diutius meditatus, farraginem omnem tot veritatum, & deductionum unico etiam demum intuitu complectatur, & quæcumque velit, ſibi animo ſeorſum ſiſtat; non niſi ſingula enunciare poſſit, atque conſcribere, dum alia deducit ipſa iterum æque fæcunda, aliis interea omnibus prætermiſſis, ad quæ regredi debeat memor, & ad omnes derivationes delatus iterum, ramos jam peragratos omittere, intactos aggredi, ac nullo ſurculo, nulla prætermiſſa fronde, pari circuitu perluſtrare.*

Finge tibi denſis confertum frondibus arbuſtum: tot ramos exurgentes e trunco, tot minores e ramis ramuſculos, e ramuſculis ſurculos prorumpentes, e ſurculis frondes, e frondibus flores, & folia. Hæc tu omnia unico intuitu contemplaris, quæ e quibus prorumpant, vides, quod libue-

rit

rit folium, quemcumque florem animo elegeris, intenta acie, admota manu per aerem, carpis, nullo ramo, nullo ſurculo attacto. At ſi formicam quampiam docere debeas, qua iter diſponendum ratione ſit, ut ad ſingula folia, ad ſingulos flores, nullo demum prætermiſſo, pertingat, quanta tibi arte opus erit, ne quid omittas, ne quopiam iterum labore irrito formicam tuam reducas? Aſcendendum per truncum: ubi primum derivantur rami, notandus diligenter eorum numerus, ac cæteris interea prætermiſſis, arripiendus unicus, per quem aſcendas: poſt paucos greſſus plures occurrunt ramuſculi: unicus iterum ſeligendus, ſepoſitis cæteris: idem in ſurculorum, idem in frondium, idem in foliorum, & florum eruptione multiplici præſtandum ſemper, donec in unicum florem, vel folium, exiguum illum viatorem tuum invexeris. Inde ad proximum bivium, vel etiam trivium redeundum, & ad alia ſubinde, atque alia, donec fronde tota peragrata, deſcendas iterum ad frondium ipſarum derivationem, tum ad diviſiones ſingulas ſurculorum omnium, ramuſculorum, ramorum, itinere moleſtiſſimo ſane, & ambiguitatis ubique pleniſſimo.

Hæc quidem imago quædam eſt ineundi laboris, rei adumbrandæ utcumque par, ſatis exponendæ omnino impar. Neque enim ibi, ubi ſe ſurculi, frondeſque diviſerint, iterum coeunt, novo ambiguitatis fonte, & erroris periculo; quod ipſum ſi forte aliquando accidat; poteris ſane ad poſtremum florem aſcendere unica, & continua via, licet ad novam plurium ſurculorum conjunctio-

ctionem deveneris unico peragrato, reliquis adhuc intactis. At hic, ubi e definitione conſtructiones quaſdam erueris, ex iis theoremata demonſtraris plura, quaquaverſum fæcunda, fere ſemper ad novam quamdam veritatem educendam, ex illis veluti ramis, & ſurculis plura ſimul neceſſaria ſunt, ex quibus ea ita pendet, ut niſi omnia perluſtraris, & mente adhuc retineas, illo veluti flore potiri omnino non poſſis.

En igitur incredibilem ſane difficultatem, quam ego, ſcholiis identidem interjectis, mollire ſaltem conatus ſum, quorum ope quid omittam interea, unde receſſerim, quo regrediar, Tyronem admoneo. Illud enim mihi in hiſce elementis concinnandis propoſui, ut deductionis pateret ordo, & Geometriæ mira indoles, atque arctiſſimus omnium veritatum nexus tranſpiceretur utcumque; nam tum demum is patere omnino poſſet, cum aliis, atque aliis definitionibus aſſumptis, alio, atque alio ordine, veritates eædem deducerentur, quod innumeris ſane, & a ſe invicem in immenſum diſcrepantibus rationibus præſtari poſſet. Illud in mentem venerat, ut hujus meæ methodi quamdam, quemadmodum in familiarum derivationibus fieri ſolet, arborem deſignarem, in qua truncum teneret definitio, tria prima problemata ternos ramos: theoremata reliquis propoſitionibus, corollariis, ſcholiis contenta abirent in ramuſculos, ſurculos, frondes, ac folia ita, ut a quovis theoremate curvæ quædam lineæ ad definitionem uſque traducerentur per illa omnia theoremata numeris paragraphorum, quibus continentur, deſignata, quibus ad ejus de-

demonſtrationem eſt opus; ubi etiam ſignis quibuſdam denotari poterat, quæ omnibus tribus communia eſſent Conicis Sectionibus, quæ ad ſingulas, vel binas pertinerent. Verum arbor ejuſmodi ita excreſcit, ut tanta amplitudo exigui voluminis mole contineri non poſſit. Eam parieti affigendam facile ſibi quiſque efformare poterit, ſi velit, regreſſu e ſingulis theorematis facto, uſque ad definitionem ipſam, ac adnotatis diligenter iis, quæ ad abſolutam ejus demonſtrationem aſſumuntur jam demonſtrata.

Et hæc quidem ad ea ſcholia pertinent, quibus deductionis ſeries identidem denotatur. In reliquis continentur ſane multa adnotatu digniſſima. Aliud (num. 18) proportionis armonicæ proprietates perſequitur; aliud (num. 111.) figurarum ſimilitudinem contemplatur, quarum complementum quoddam eſt determinatio ſatis elegans puncti communis homologi, quod niſi in infinitum recedat in binis quibuſque figuris habetur ſemper, & unicum, ac rectarum homologarum communium, quarum in inverſa ſimilitudine ſemper habetur unica per id punctum traducta, in directa vero vel omnes ejuſmodi ſunt, vel nulla; & ea quidem in adjecta diſſertatione habetur a num. 328. aliud (num. 12, 102) Conicarum Sectionum tranſformationem in rectas, in circulum, in ſe invicem perſequitur: aliud (num. 102, 280, 388, 435, 442) ipſarum conſtructiones multiplices, ac determinationes exponit: aliud (num. 280) curvaturas determinat, & plures tangentium, ac ſecantium proprietates pro diverſa poſitione puncti,

per

per quod ducantur, definit. Aliud (num. 270) docet inventionem binarum mediarum continue proportionalium inter binas rectas datas, & arcus circularis, ſive anguli triſectionem, quam omnino haberi non poſſe per Euclideam Geometriam ſatis ibi quidem accurate, ni fallor, evinco, & ipſius repugnantiæ fontem aperio: aliud (num. 337) longe alium ordinem exhibet, quo elementa hæc ipſa diggeri potuiſſent: aliud (num. 343) ſimilium Ellipſium, & Hyperbolarum, ac æqualium Parabolarum proprietatem evolvit, qua aliæ reſpectu aliarum fungantur vicibus aſymptotorum: aliud (num. 536) varias circuli Sectionem Conicam contingentis mutationes conſiderat, donec demum is in oſculatorem deſinat. Accedit iis, ut alia breviora ſcholia prætermittam, unicum generale geometricum lemma (num. 204) de tribus rectis ad punctum quoddam convergentibus, & parallelas rectas intercipientibus, quod mihi ſummæ pluribus in locis extitit utilitatis.

Hiſce omnibus abſolutis, quæ pertinent ad harum curvarum conſiderationem in plano, ad ſolidorum ſectiones gradum feci. Definitis Cono (num. 546), Cylindro (num. 590), Conoide (num. 516), ſectionum formas evolvi corollariis quibuſdam, ac ſcholia ſuo loco diſpoſui, quibus mira in primis tranformationum geometricarum indoles continetur. Ibi autem notatu omnino digniſſima ſunt, quæ occurrunt (num. 653) in ſolido genito converſione Hyperbolæ circa axem conjugatum, in quo (num. 666) quædam etiam puncti cujuſdam adeſt veluti diſciſſio, & crurum per-

mutatio, poſt receſſum Hyperbolæ in rectas lineas, mira ſane, & ad continuitatis legem illuſtrandam aptiſſima. Verum, quod ad ejuſmodi tranſformationes pertinet, in adjecta diſſertatione multo eſt uberius pertractatum.

Diſſertatio autem ipſa aliquanto longior, quam initio arbitrarer, evaſit; at ea in Geometriæ arcana intimiora irrumpere meditanti facem præferet, & viam ſternet mirum in modum. Multa autem continet, quæ licet ſcita ſane digniſſima, ego quidem nuſquam alibi offendi, multa, quæ licet alibi etiam occurrant ſæpe, nuſquam ego quidem ad certos reperi redacta canones, & geometrica methodo pertractata. Ea tamen pro novis venditare non audeo; cum mihi quidem inſcitiæ meæ culpa, nova eſſe poſſint, licet fortaſſe ſint apud Litterariam Remp: vetuſtiſſima.

Diſſertatio ipſa de Locorum Geometricorum tranſformationibus agit. Ubi nimirum problema quodpiam generaliter ſolveris; mutata nonnihil datorum diſpoſitione; plerumque ipſa conſtructio mutari plurimum debet, quædam ſummæ in differentias abeunt, quædam rectarum, & angulorum directiones mutantur, quidam termini evadunt impoſſibiles, quidam in infinitum excreſcunt ita, ut interſectio, quæ ad problematis ſolutionem neceſſaria erat, nuſquam ſit, ut ubi binæ rectæ convergentes abeunt in parallelas, quidam circuli, abeunte centro in infinitum, mutantur in rectas lineas; ac alia ejuſmodi accidunt ſane multa. In iis autem conſtantiſſimas quaſdam leges obſervat Geometria, quæ nihil uſquam operatur per ſaltum.

tum. Sed in ejuſmodi continuitate ſervanda occurrunt ſæpe quidam progreſſus in infinitum, & quidam tranſitus per infinitum, qui ſecum trahunt quædam, quæ haud ſuo, an alio melius nomine appellari poſſint, quam myſteriorum quorundam infiniti, quæ tamen eo excreſcunt, ut in vera demum abſurda videantur recidere.

Hoc argumentum in ea mihi diſſertatione evolvendum conſtitui, quo ſucceſſu, videbit, qui legerit: nihil autem uſpiam, præter communia Geometriæ, & mea Conicarum Sectionum elementa, requiritur ad abſolutam omnium intelligentiam. Primo quidem negativas quantitates in Geometria conſiderandas eſſe, ut in Algebra, geometrica methodo oſtendo, & ubi directio quantitatum mutatur, mutationum numerum parem in quantitatibus determinantibus, evinco, relinquere directionem quantitatis determinatæ, imparem vero numerum eandem mutare; unde mihi imaginariæ quoque quantitates profluunt in lateribus quadratorum, quæ in negativa migrarint. Eorum vero omnium plura exempla profero e ſimplici Geometria admodum manifeſta.

Ex theorematis demonſtratis deduco a num.693 formam curvarum omnium, quæ ad ſublimiores Parabolas, vel Hyperbolas inter aſymptotos reducuntur, in quibus ordinata eſt in aliqua ratione rationali abſciſſæ, quarum curvarum geometricam accuratam conſtructionem profero per puncta, quæ cum erutis ex poſitivorum, negativorum, imaginariorum legibus mirum in modum conſentiunt. Tum a num. 714 ad continuitatis legem conſiderandam

gradum facio, quam etiam ubi quantitates è poſitivis tranſeunt in negativas, religioſe obſervardemonſtro. Tranſitum autem ejuſmodi, oſtendo fieri, tam per nihilum, quam per infinitum, ubi ingens quoddam infiniti myſterium ſe prodit. Recta nimirum linea, quæ utrimque in infinitum producta in illis quibuſdam infinitis diſtantiis oppoſitis connectitur quoddamodo, & in ſe ipſam redit, tamquam ſi eſſet circulus quidam infinitus, cui rectam lineam æquivalere demonſtro, ac eundem nexum, & in cruribus infinitis curvarum evinco manifeſtiſſimum, plurima exempla proferens, & præcepta quædam adjiciens, quæ pertinent ad ejuſmodi tranſitus. Illud autem inprimis oſtendo a num.729, ubi devenitur ad nihilum, vel ad infinitum, aliquando quidem tranſitu per eum limitem facto, quantitatem abire in negativam, aliquando vero inde regredi retro ex eadem parte, cujus exempla profero plura, & inde crurum ſeu parabolici, ſive hyperbolici generis, quorum naturam doceo, regreſſus ex infinito multiplices, ac cuſpidum naturam, & quædam alia, quæ ad tangentes, & curvaturam pertinent, evolvo, quæ ſane omnia ſunt ad continuitatis legem, & Geometriæ indolem cognoſcendam aptiſſima.

Accedit alius quendam rectæ per modum circuli infiniti in ſe redeuntis conſideratæ uſus, quem contemplor a num.751, vi cujus quantitatem, quæ poſt negativam, & binas poſitivas ſit quarta, non negativam revera eſſe debere, demonſtro, ſed veluti pluſquam infinitam, & datis binis punctis in recta infinita, ejus ſegmentum iis pun-

punctis interceptum, oſtendo, eſſe duplex, alterum finitum, alterum per infinitum traductum, quorum primum bifariam ſecetur in puncto quodam datis interjacente, ſecundum in infinito illo ipſo, in quo bini infiniti tractus rectæ a binis illis punctis utrinque in infinitum productæ connectuntur quodammodo, & copulantur, quæ quidem conſideratio ingentis eſt uſus in Sectionum Conicarum analogia conſideranda. Tum a num.775 migrationem perſequor a ſtatu reali ad imaginarium, qui numquam haberi poſſit, niſi quantitas vel ad nibilum deveniat, vel ad infinitum, & in utroque caſu bina puncta collidantur quodammodo, ac in ſe mutuo irruant velocitate vel infinities majore, quam alibi, vel infinities minore, quod analogiam etiam quamdam exhibet haud ſane inelegantem ejus migrationis cum vero viventium interitu. Ibidem autem in cono ſecto per planum mobile quoddam, ſeries curvarum naſcentes, in ſe mutuo transformatas, ac in imaginarietatem deſinentes oſtendo.

His expoſitis, & tanquam materia quadam novi cujuſdam ædificii præparata, ad ordinandam transformationum theoriam progredior num. 760, *quam duplicis analogiæ definitione, &* 11 *Canonibus complector. Analoga dico, puncta, quæ eadem conſtructione petita ab interſectionibus eorumdem Locorum Geometricorum definiuntur: lineas analogas, quæ punctis analogis, ſuperficies, quæ lineis, ſolida, quæ ſuperficiebus analogis terminantur. Bina autem diſtinguo analogiæ genera primarium alterum, ubi etiam directio ſervatur, alterum ſecundarium, ubi ea contraria exiſtit. Canon*

non primus num.764 pertinet ad quantitates, quæ primario analogiæ genere ſunt analogæ, in quibus nulla mutatio fit, niſi quæpiam quantitates per infinitum traductæ pluſquam infinitæ cenſendæ ſint, ubi etiam infiniti myſteria quædam occurrunt. Secundus num.772 ad eas pertinet, quæ ſecundario genere analogiæ ſunt analogæ, ubi oſtenditur, quando ſummæ in differentias migrare debeant, & modi argumentandi mutentur. Tertius num.777 mutationes directionis exponit, quæ in quavis proportione utcumque compoſita nonniſi numero pari haberi poſſint. Quartus num.790 ad angulorum mutationes pertinet, quæ laterum mutationem conſequuntur. Quintus num. 799 tranſitum continet anguli e poſitivo in negativum, mutata hiatus directione, ſive ejuſmodi mutatio fiat tranſeundo per nihilum, ſive per duos rectos. Sextus num. 807, quadrati negativi latera determinat imaginaria, & mediam inter binas quantitates, alterius tantum directione mutata, imaginariam, binas autem medias reales magnitudine æquales, directione contrarias, qui quidem Canon in Sectionibus Conicis conſiderandis incredibilem uſum habet, ut mox oſtendam.

Septimus num. 835 ad quantitates tranſit, quæ in nihilum abeunt, vel ita in infinitum, ut ſaltem alter limes nuſquam jam ſit, quod ſi in aliqua proportione binis terminis manentibus finitis contingat uni e reliquis, continget idem & alteri, niſi forte, qui manent, vel extremi fuerint, vel medii, quo caſu abeunte altero in nihilum, alter in infinitum abire debet. Octavus num.839 eſt

eſt de rectis, quæ e convergentibus parallelæ fiunt, interſectione ita in infinitum recedente, ut nuſquam jam ſit, quarum & angulus ex altera parte evaneſcit, ex altera deſinit in binos rectos. Nonus (num. 853) præſcribit, quid agendum ſit, ubi vertice trianguli abeunte in latus aliquod, rectæ, quæ ſe prius interſecabant, ſuperponuntur. Decimus circuli peripheriam, docet (num. 858), abire in rectam, ubi altero radii termino extante, centrum ita in infinitum recedat, ut nuſquam jam ſit. Demum undecimus (num. 862) rationem definit, quam habere debeant binæ rectæ in infinitum excreſcentes, quæ evadit æqualitatis ratio, ubi differentia finita maneat, ubi autem ea etiam in infinitum excreſcat, quævis eſſe poteſt, nulla, infinita, æqualitatis, vel finitæ inæqualitatis cujuslibet.

Porro ſinguli Canones demonſtrantur accurate: ſingulorum exempla ex iis, quæ præmiſſa fuerant proferuntur: ſingula ad Conicarum Sectionum naturam, & analogiam contemplandam applicantur, ac eorum uſus in hiſce meis earundem elementis concinnandis oſtenditur. Plura ſane occurrunt adnotatu digna, ut ea, quibus num. 784 ratio redditur ex infiniti myſteriis quibuſdam repetita, cur etiam ubi quantitates per infinitum traductæ abeunt in negativas, adhuc ſubtrahendæ ſint, atque alia ejuſmodi ſane multa; illud in primis non omittendum, quod pluribus in locis oſtenditur, potiſſimum vero, ubi ſecundaria analogia exponitur, & ubi fœcundiſſimus ille ſextus Canon ad Conicas Sectiones applicatur. Nimirum

rum ubi Ellipſis in Hyperbolam tranſit per Parabolam, axi finito Ellipſeos, & centro non ſuccedit analogus primario analogiæ genere axis finitus Hyperbolæ, ſed axis per infinitum traductus, & finito illius centro, non centrum hujus finitum, ſed punctum quoddam in infinito deliteſcens. Diametri autem ſecundariæ Hyperbolæ nullo analogiæ genere analogæ ſunt diametris Ellipſeos, ſed horum quadrata negativè ſumpta quadratis illorum negativis æquantur, quorum quadrata idcirco ſecundario analogiæ genere ſunt analoga illorum quadratis, latera vero, quæ lateribus analoga eſſent, imaginaria ſunt. Id ipſum manifeſto ibidem evincitur. Inde autem deducitur, quæ proprietates communes eſſe debeant Ellipſi, & Hyperbolæ, quæ ab altera ad alteram transferri nequeant. Inde nimirum patet, cur Ellipſis finito centro cavitatem, Hyperbola convexitatem obvertat: cur axis tranſverſus, & quævis conjugata diameter in Ellipſi ad perimetrum terminetur, axis conjugatus Hyperbolæ finitus ille, & ſecundariæ diametri omnes ipſi perimetro nuſquam occurrant: cur aſymptotis, & tam multis elegantiſſimis aſymptotorum proprietatibus Ellipſis carere debeat; ac alia ejuſmodi evolvuntur ſane multa earum curvarum diſcrimina, atque illud generaliter oſtenditur, proprietates, quæ a ſolis diametris conjugatis pendeant, nuſquam eſſe debere communes, nec communi demonſtratione, & conſtructione erui poſſe; quæcumque autem ab earum quadratis pendeant, ea communia fore omnia, ſi quadrata diametrorum ſecundariarum Hyperbolæ habeantur

pro-

pro negativis. Exempla eorum proferuntur plurima, quæ ad harum curvarum naturam cognoſcendam, & meorum elementorum commendationem plurimum conferunt.

Porro ubi in fine poſtremi Canonis de rationibus agitur quantitatum abeuntium in infinitum, ibi jam demum incipiunt ipſa infiniti myſteria migrare in abſurda, de quibus a num. 878 *ad finem uſque ita agitur, ut infinitum ipſum extenſum pro impoſſibili haberi omnino debere videatur. Ratio autem impoſſibilitatis ipſius ex ipſa Conicarum Sectionum natura demum eruitur, quæ ejuſmodi invenitur, ut infiniti ipſius natura ſimplicitatem infinitam requirat, quæ cum infinitis partibus ab omni quantitatum excreſcentium genere requiſita conjungi omnino non poteſt; unde demum ad ipſam illam Dei O. M, immunem ab omni compoſitione ſimplicitatem immenſam cum infinitate conjunctam contemplandam traducimur, in qua ipſa contemplatione fuſior hæc diſſertatio tandem aliquando abrumpitur.*

Hæc univerſi hujus operis eſt Synopſis quædam, in qua prætermiſſis quam plurimis, præcipua tantummodo capita innuuntur. Conſequetur aliud agens de infinitis, & infinitæ parvis, quæ mihi indefinita ſunt, quorum naturam explicabo, ordines diggeram, elementa tradam geometrico rigore demonſtrata, & ex iis ad curvarum generales proprietates gradum faciam, cuſpides, flexus contrarios crura infinita, contactus, oſcula, evolutas, maximorum, & minimorum theoriam, atque alia ejuſmodi evolvam, ac ſingulares præcipuarum, & ma-

maxime utilium curvarum proprietates deducam, ac demonſtrabo.

Illud unum hìc demum monendum eſt. Si quis in hoc volumine vel non poſſit, vel nolit ſingula perſequi, & præcipuas tantummodo, ac maxime neceſſarias Sectionum Conicarum proprietates inquirat; is & univerſam diſſertationem, & ſcholia fere omnia, & plurima etiam Corollaria omittere poterit ſine demonſtrationis, ac deductionis damno. Ita enim præcipua quædam inter ſe copulavi eam ipſam ob cauſam, ut reliquis non indigerent. Vix autem paginas 100 *requirunt præcipuæ ejuſmodi proprietates inter ſe ſatis arctè connexæ. En numerorum ſeriem, quam reliquis omiſſis poterit perſequi, in qua, ubi binis numeris puncta interſeruntur, illud ſignificatur, intermedios numeros omnes percurrendos eſſe.*

1... 3, 6... 11, 18... 30, 34... 47, 54, 56, 57, 62... 84, 87, 93, 128... 137, 140... 144, 149... 159, 164... 171, 173... 183, 189... 195, 198... 201, 204... 213, 221... 231, 242... 247, 256... 258, 260, 261, 299, 300, 305... 308, 328, 331, 351... 355, 357, 358, 363, 364, 397, 398, 402... 407, 411... 414, 436... 441, 457... 461, 495, 497, 503... 508, 546, 550... 568, 590... 605, 615... 643.

Hac uſque habentur, quæ pertinent ad Conicas Sectiones conſideratas vel in plano, vel in cono. Si Cylindri, & Conoidum Sectiones addere libeat, numeros 590... 605, 615... 643, *ſuperioribus addat, & voti penitus compos, fiet.*

IM-

Pag. lin.	*Errata*	*Corrige*
27. 20	tranſverſi	conjugati
30. 4	ad extrema puncta	ab extremis punctis
31. 27] 29]	(num.91)	(num.92)
39. 17	jungunt	jungit
42. 26	directæ	directè
48. 25	ducta ; erit	ducta erit
50. 19	Coniea	Conica
51. 1	. Aſſumptis	, aſſumptis
56. 14	quoquæ	quoque
60. 19	in i tum	in i : tum
61. 12	quoquæ	quoque
62. 21	contigit	contingit
64. 8	æqualitati	æqualitatis
72. 29	etiam anguli	etiam(num.25 Trig.) coſinus angulorum FPH,*f*P*h*,& ipſi anguli
73. 27	At Ellipſi	At in Ellipſi
74. 32	runt	erunt
80. 26	puncti	punctis
84. 17	RP	RP'
85. 13	perpendicularis	perpendiculari
87. 17	(num.134)	quæ (num.211) erunt parallelæ ordinatis diametrorum CI,CH,C*i*
103. 15	quam	quam , quæ
104. 9	quadratam	quadratum
11	*p*'*b*'P'	*p*'*b*P'
14	ut quadratum	quadratum
106. 28	nnm.247	246
109. 14	arcus	in fig.86 arcus
113. 28	FBP...FBPm. AFm	FBP'...FBm-AFBm

Pag. lin.	*Errata*	*Corrige*
112. 32	PO	PO parallelaFm
115. 22	habebetur	habebitur
23	FBmAFm	FBmAFBm
117. 11	L'	L
122. 9	citetiore	ulteriore
11	ulteriore	citeriore
131. 5	P*p*	P , *p*
132. 13	*166*	164 , & *166*
141. 26	L'P	L'P'
144. 10	539	339
164. 7	proponantur	proponuntur
173. 28	quarum	quorum
175. 18	CP	EP
196. 2	ſubornali	ſubnormali
205. 9	illa	ille
210. 21	V*u*	VR
217. 4	HN	H*n*
217. 8] 218. 4]	major	major quam
240. 29	F.268	F.208
268. 21	utervis	utravis
274. 32	axi	axis
278. 31] 279. 10]	accurrat	occurrat
318. 12	248	fig.248
337. 8	cica	circa
361. 6	quoſdam	quaſdam
370. 20	ab	ad
372. 21	ſectat	ſecat
393. 31	videbibus	videbimus
443. 18	perimemetro	perimetro

IMPRIMATUR:

Si videbitur Reverendiſſimo Patri Magiſtro Sacri Palatii Apoſtolici.

F. M. de Rubeis Patriarcha Conſtantinop. Viceſg.

IMPRIMATUR.

Fr. Vincentius Elena, Magiſter Socius Rmi P. Magiſtri Sac. Palatii Apoſtolici Ordinis Prædicatorum.

SECTIONUM CONICARUM
E L E M E N T A.

DEFINITIO I.

1. SI *ex omnibus punctis* P *cujuſdam* F. 1.
lineæ ductâ PD *perpendiculari* 2.
ad rectam AB *indefinitam poſitione datam, & alia recta* PF *ad punctum* F *datum extra ipſam* AB, *fuerit ſemper* FP *ad* PD *in ratione data; lineam illam dico* Sectionem Conicam, Ellipſim, Parabolam, *vel* Hyperbolam, *prout illa ratio fuerit minoris inæqualitatis, æqualitatis, vel majoris inæqualitatis : rectam* AB Directricem; *punctum* F, Focum, *rationem illam datam*, Rationem determinantem; *rectam* PD, Ordinatam directrici ad angulos rectos, *rectam* FP, Foci Radium.

Coroll. 1.

2. *Si in quovis alio angulo dato ordinentur directrici rectæ* PH, *ſemper ratio cujuſvis radii foci ad ſuam ordinatam in angulo illo dato erit conſtans,*

& data : nimirum compoſita ex ratione determinante, & ratione ſinus inclinationis ad radium.

3. Nam ratio FP ad PH componetur ex ratione FP ad PD, quæ eſt ratio determinans, & ratione PD ad PH, quæ ob angulum PDH rectum eſt ratio ſinus anguli PHD ad radium (num. 88. Trig.)

Coroll. 2.

4. *Et ſi in quadam linea ratio cujuſvis* FP *jungentis quodvis ejus punctum* P *cum dato puncto* F *ad ſuam* PH *in dato angulo ordinatam datæ rectæ non tranſeunti per* F *fuerit in ratione data, erit illa linea Sectio Conica, & ejus ratio determinans componetur ex illa ratione conſtanti, & ex ratione radii ad ſinum inclinationis.*

5. Ducto enim perpendiculo PD, ratio FP ad PD componetur ex ratione FP ad PH, & PH ad PD, quarum prima datur ex hypotheſi, ſecunda eſt ratio radii ad illum ſinum.

Coroll. 3.

6. *Bini radii foci erunt ad ſe invicem, ut ſuæ ordinatæ in quovis angulo communi.*

7. Cum enim ſit FP ad PH, ut F*p* ad *ph*, erit alternando FP ad F*p*, ut PH ad *ph*.

Coroll. 4.

F.3. 8. *Si recta quævis occurrens foco in* F, *dire-*
4. *ctrici in* Q *occurrat Sectioni Conicæ in binis punctis* P, p, *altero ex iis jacente inter ipſa puncta* F, Q *altero ad partes utriuslibet, erit diviſa in punctis* p, F, P, Q *in proportione harmonica.*

9. Erit enim F*p* ad FP, ut *p*Q ad PQ. Sunt autem in fig. 3. in tribus rectis *p*Q, FQ, PQ re-

ctæ

ctæ pQ, PQ extremæ, rectæ vero Fp, FP differentiæ extremarum a media; at in figura 4. trium Fp, FQ, FP rectæ Fp, FP extremæ, rectæ pQ, PQ extremarum differentiæ a media. Igitur utrobique erunt extremæ ad ſe invicem, ut pariter ad ſe invicem differentiæ extremarum a media, quæ eſt ipſa notio proportionis harmonicæ.

Coroll.5.

10. *Ratio radii foci ad ordinatam in quovis angulo obliquo erit in Ellipſi, & Parabola ratio minoris inæqualitatis, in Hyperbola minoris inæqualitatis, æqualitatis, vel majoris inæqualitatis, prout radius ad ſinum inclinationis habuerit rationem majorem, æqualem, vel minorem ratione determinante, quarum quidem inclinationum eam, quæ rationem exhibet æqualitatis, dicemus* Inclinationem æqualitatis, *& ejus angulum acutum cum directrice, angulum* Rationis æqualis, *ſive angulum* Æqualitatis.

11. Nam in triangulo rectangulo PDH ſemper baſis PH major eſt latere PD. Adeoque, F.1.
cum PD in Ellipſi ſit major, quam PF (num.1.), 2.
ac in Parabola æqualis, erit ſemper in iis PH major, quam PF. At in Hyperbola, in qua PD eſt minor, quam PF, prout ratio PH ad PD fuerit major, æqualis, vel minor reſpectu rationis PF ad PD, erit quoque PH major, æqualis, vel minor reſpectu PF.

Digitized by Google

SCHOLIUM I.

12. Lineas hujuſmodi appellavimus Sectiones Conicas, quia deinde demonſtrabitur, cono utcumque ſecto non per verticem, obvenire hujuſmodi lineas, ut pariter Ellipſis, Parabola, & Hyperbola nomen accipiunt Græca origine in communi methodo tractandi Sectiones Conicas, a quodam defectu, æqualitate, vel exceſſu, qui deinde demonſtratur. Quæcumque ſit nominis ratio, modo ſemper in ea ſignificatione accipiatur, in qua in definitione uſurpatum eſt, nihil intereſt. Ellipſeos autem defectus ille, Parabolæ æqualitas, & Hyperbolæ redundantia in hac noſtra methodo etiam ex ipſa definitione conſtat; cum ratio determinans in prima ſit minoris inæqualitatis, in ſecunda æqualitatis, in tertia majoris inæqualitatis.

13. Porro mirum ſane, quam immediate ex hac proprietate, quam aſſumpſimus pro definitione, & quam alii in Ellipſi ſaltem, & Hyperbola poſtremam fere demonſtrare ſolent (nam pro Parabola hanc ipſam aſſumpſit etiam Hoſpitalius) præcipue Sectionum Conicarum proprietates fluant, & quidem, quæ iis communes ſunt, communi ſemper demonſtratione eruuntur vinculo quodam, ac miro nexu, quo Geometriæ indoles, & vis ſane incredibilis ſponte incurrant in oculos.

14. Præterea multo expeditior harum linearum conſideratio Tyroni evadit, ſi eæ in plano conſiderentur, quod & ipſe Hoſpitalius præſtitit,

tit, & alii multi, quam ſi ſolidorum Geometria opus ſit, & variis planorum in cono interſectionibus.

15. Demum hæc definitio ita Conicis Sectionibus eſt propria, ut eas quodammodo & a circulo diſtinguat, qui cæteroquin inter Ellipſes enumerari debet, & è Cono Secto, ut infra videbimus, ipſe etiam prodit, ſive is ſecetur ſectione baſi parallela, ſive alia quadam, quæ dicitur ſubcontraria. Si enim Ellipſis in circulum abeat, directrix, ut patebit paullo inferius, abit in infinitum, nec uſquam jam eſt.

16. At ſi directrix tranſiret per ipſum punctum datum pro foco, nullum aliud punctum inveniri poſſet, cujus diſtantia ab ipſo foco ad perpendiculum in directricem ductum haberet rationem datam, ubi ea ratio eſt minoris inæqualitatis. Sed ſi ratio eſſet æqualitatis, ſatisfacerent quæſtioni puncta omnia rectæ directrici perpendicularis ductæ ex ipſo puncto dato in utramvis plagam; & ſi ratio eſſet majoris inæqualitatis, ſatisfacerent puncta omnia binarum rectarum hinc inde ita inclinatarum, ut radius ad ſinum inclinationis eſſet in ratione determinante.

17. Nam ſi punctum datum in directrice AB ſit F, quodvis aliud punctum vel jacet in recta *b*FH perpendiculari ipſi AB ducta per F, ut R, & eſt FR tam diſtantia a puncto F, quam perpendiculum in directricem demiſſum, adeoque ea duo æquantur; vel jacet extra, ut Q, & ducto perpendiculo QZ in directricem, ſemper erit ipſo major diſtantia QF baſis trianguli rectanguli QZF. F. 5.

Quare nuſquam haberi poteſt in eo caſu ratio minoris inæqualitatis. Ratio autem æqualitatis habetur in ipſa recta perpendiculari HF*b*, in qua ſumptis ubicumque punctis R, & *r*, eſt ſemper diſtantia FR, vel F*r* ad perpendiculum RF, vel *r*F in ratione æqualitatis. Ac demum ſi ratio ſit majoris inæqualitatis, ſumpto in perpendiculari FH ſegmento EF ad arbitrium, ductaque per E recta *u*EV indefinita parallela directrici, centro F intervallo rectæ, quæ ad EF ſit in ratione data determinante, inveniantur in ipſa bina puncta *u*, & V, ac ducantur per ea, & per F rectæ indefinitæ G*g*, I*i*, & quodvis punctum utriuslibet, ut Q, *q*, ſatisfaciet quæſtioni. Erit enim FQ ad QZ, ut FV ad EF in ratione data, & eadem eſt demonſtratio pro *q*. Eſt autem ratio illa determinans FQ ad QZ, ut radius ad ſinum inclinationis QFZ. Quare patent quæcumque fuerant propoſita.

SCHOLIUM II.

18. IN Coroll. 4. invenimus diviſionem harmonicam, quæ in Sectionibus Conicis potiſſimum ſæpe occurrit, & in Geometria elegantiſſimas proprietates habet. Præcipuas quaſdam, quarum uſus nobis occurret, hic exponemus.

F.6. 19. *Si quatuor puncta* A, B, C, D, *ita diſpoſita ſint, ut diſtantiæ* AB, CB, *binorum* A, C *alternatim ſumptorum ab altero e reliquis* B *eandem rationem habeant, ac diſtantiæ eorundem* AD, CD *ab altero* D, *erunt in proportione harmonica tres diſtantiæ utriuslibet extremi a reli-*

liquis tribus, *nimirum tam* AD, BD; CD, *quam* AB, AC, AD.

20. Primum patet: nam AD, DC erunt primi ternarii extremæ, & AB, BC extremarum differentiæ a media. Secundum facile deducitur. Cum nimirum ſit AB ad BC, ut AD ad DC; erit & alternando AB ad AD, ut BC ad DC. Sunt autem AB, AD extremæ ſecundi ternarii, BC, DC extremarum differentiæ a media AC.

21. Patet autem eadem demonſtratione, non poſſe proportionem harmonicam terminari ad alterum extremum D, quin ſimul terminetur ad alterum A.

22. *Si jam intervallum binorum alternorum quorumvis* AC *dividatur biſariam in* R, *erunt* RB, RC, RD *in ea continua ratione geometrica, quam habet proportio harmonica trium quantitatum terminatarum ad extremum* A *aſſumptum pro biſſectione*, *nimirum* AB *ad* AD, *vel* BC *ad* CD.

23. Aſſumptis enim R*b*, R*d* æqualibus RB, RD, erunt & A*b*, A*d* æquales CB, CD, adeoque erit *b*B rectarum AB, BC differentia, AC earum ſumma, ipſa AC rectarum AD, DC differentia, *d*D earum ſumma. Cum igitur ſint BC ad CD, & BA ad DA in eadem ratione, erit in eadem ratione & antecedentium differentia *b*B ad conſequentium differentiam AC, & illorum ſumma AC ad horum ſummam *d*D; (Cap. 2. Arit. num. 13.) ac ſumptis dimidiis, erit RB ad RC, & RC ad RD in eadem ratione.

24. *Contra vero ſi fuerint* RB, RC, RD *in continua ratione geometrica, & mediæ* RC *aſſumatur æqualis* RA *ad partes oppoſitas, puncta* A, B, C, D *conſtituent binas proportiones harmonicas quantitatum terminatarum ad* D *&* A, *& ratio illa* RB, *ad* RC, *vel* RC *ad* RD *erit eadem, ac ratio proportionis terminorum terminatorum ad* A, ut facile patebit regreſſu demonſtrationis ipſius.

25. *Datis binis punctis alternis* A, C, *& ratione proportionis harmonicæ, habebuntur facile, & reliqua duo, medium quidem ſecando* AC *in ea ratione in* B, *extremum ſecando* AC *bifariam in* R, *& ſumendo* RD *tertiam proportionalem poſt* RB, RC. Patet autem ex ipſa demonſtratione debere D aſſumi ad partes B reſpectu R, quod quidem eo recedet magis a C, quo ratio data accedet magis ad rationem æqualitatis, puncto B eo pariter magis accedente ad R, quod quidem punctum abibit in ipſum R, punctum vero D ita in infinitum recedet, ut nuſquam jam ſit, ubi ratio data evaſerit ratio æqualitatis.

26. *Quotieſcumque quatuor puncta* A, B, C, D, *conſtituunt proportionem harmonicam, ſecta bifariam in* R *diſtantia binorum alternorum* AC, *erunt geometrice proportionales quatuor diſtantiæ ab extremo* D *in biſectione non aſſumpto, nimirum* AD *ad* RD, *ut* BD *ad* CD; *& quatuor a puncto* B *ejus alterno, nimirum* AB *ad* RB, *ut* DB *ad* CB.

27. Cum enim (num.22.) ſit invertendo RD ad RC, ſive ad RA in illa ratione DC ad CB,

erit

erit priorum ſumma AD ad primam RD, ut poſteriorum ſumma DB ad tertiam DC. Cum vero ſit invertendo DC ad CB, ut RC, ſive RA ad RB; erit componendo DB ad CB, ut AB ad RB.

28. *Si aſſumpta pro diametro diſtantia* AC *binorum e quatuor punctis conſtituentibus proportionem harmonicam alternatim ſumptorum, deſcribatur circulus, & ad quodvis peripheriæ punctum* E *ducantur ex reliquis binis punctis recta* BE, DE, *erunt eæ ad ſe invicem ſemper in eadem ratione* BC *ad* CD, *ſive* BA *ad* AD, *recta* CE *earum angulum* BED *ſecabit bifariam, & recta* AE *angulum* BEG, *quem altera* BE *continet cum altera* DE *producta.* F. 7.

29. Ductis enim BF, BG parallelis AE, CE, & occurrentibus rectæ DE in F, & G, erit ob parallelas DE ad EF, ut DA ad AB, nimirum ob proportionem harmonicam ut DC ad CB, ſive ob parallelas ut illa eadem DE ad EG. Quare æquales erunt GE, EF, angulus autem GBF, quem continent rectæ GB, BF æquatur angulo, quem continent AE, EC ipſis parallelæ, qui rectus eſt in ſemicirculo. Igitur & is rectus erit; & circulus centro E diametro GF deſcriptus tranſibit per B, adeoque EB æqualis erit tam EF, quam EG, & habebit, ut illæ, ad ED eam rationem, quam BA ad AD, vel BC ad CD. Anguli vero BEC, FEC æquales, ille alterno EBG, hic interno & oppoſito G æqualibus ad baſim trianguli iſoſcelis BEG æquabuntur inter ſe; & eodem argumento AEB, AEG æquales angulis EBF, EFB.

30. Cog-

30. *Contra vero ſi recta* CE *ſecet bifariam angulum ad* E *trianguli* BED, *&* EA *ipſi perpendicularis occurrat diametro in* A, *quatuor puncta* A, B, C, D *conſtituent proportionem harmonicam, cujus ratio in ternario terminato ad* D *erit eadem, ac ratio laterum* BE, ED *ipſius trianguli*. Ducta enim BG parallela CE, anguli EBG, EGB erunt æquales æqualibus BEC, DEC, adeoque & inter ſe, & EG, EB æquales, ac facta EF æquali ipſis EG, EB, angulus GBF erit rectus, adeoque BF congruet cum recta rectæ AE parallela, quæ ibidem rectum angulum continere debet. Erit igitur DA ad AB, ut DE ad EF, ſive ut ipſa DE ad EG, nimirum ut DC ad BC. In hoc caſu etiam recta EA ſecabit bifariam angulum BEG, & pariter ſi recta EC ſecante bifariam angulum BED, recta EA ſecet bifariam angulum BEG, puncta A, B, C, D proportionem harmonicam conſtituent.

F.8. 31. *Demum ſi in eodem circulo ducatur per* B *chorda* EH *perpendicularis diametro, rectæ quidem* DE, DH *contingent circulum in* E, *&* H, *quævis autem recta in earum angulo ducta ex D, & occurrens chordæ ipſi in* L, *circulo in* I, *&* M *ſecabitur in punctis* M, L, I, D, *in proportione harmonica*.

32. Primum patet ex eo, quod (num. 22.) erit RB ad RC, ſive ad RE, ut hæc ad RD, ac proinde triangula RBE, RED ob angulum ad R communem ſimilia erunt, & angulus RED recto RBE æqualis: adeoque ED perpendicularis radio ER erit tangens, & eadem eſt demonſtratio pro recta DH.

33. Se-

33. Secundum ſic demonſtratur: Ductis per I, & M chordis I*i*, M*m* parallelis EH, ac proinde perpendicularibus ad DA, & bifariam ſectis, quæ occurrant rectis DE, DH in F, G, & *f*, *g*, patet ipſas quoque F*f*, G*g* bifariam debere ſecari ab ipſa DA, adeoque fore F*i* æqualem I*f*, & G*m* æqualem *g*M, ac rectangula FI*f*, GM*g* rectangulis IF*i*, MG*m*. Porro erunt FI ad GM, & I*f* ad M*g*, ut DI ad DM: adeoque quadratum DI ad quadratum DM, ut rectangulum FI*f*, ſeu IF*i*, ſive quadratum tangentis EF ad rectangulum GM*g*, ſive MG*m*, vel quadratum GE: adeoque ut quadratum IL ad quadratum LM. Erit igitur DI ad DM, ut LI ad LM: ut oportebat.

PROPOSITIO I. PROBL.

34. *Dato foco, directrice, & ratione determinante, invenire omnia Sectionis Conicæ puncta.*

35. Ducatur per focum F recta HF*b* indefinita occurrens directrici AB ad angulos rectos in E, ponaturque H ad partes F. Capta in directrice verſus partem utramlibet, ut verſus A, recta EK æquali EF ducatur per F, & K recta indefinita T*t*, poſito T ad partes F. Ducatur per F recta perpendicularis ipſi EF, ac in ea capiantur FV, F*u*, quæ ſint ad FE in ratione determinante, poſito V in angulo FKE, quas quidem patet (num. 1.) fore minores FE in Ellipſi, æquales in Parabola, majores in Hyperbola. Per E, & *u* ducatur recta indefinita G*g*, poſito G citra directricem ad partes

F. 9. 10 11

tes F, quæ neceſſario occurret rectæ T*t* citra di-reſtricem inter K, & F alicubi in L; tum per E, & V recta indefinita I*i*, poſito I citra directri-cem ad partes F, quam patet in Parabola in fig. 10. debere eſſe parallelam ipſi T*t* (cum nimirum FK, VF ex una parte parallellæ ſint, & ex alia æquentur eidem FE, adeoque & inter ſe) ac proinde in Ellipſi in fig. 9. debere occurrere ipſi T*t* alicubi in *l* citra directricem ad partes T ob FV ibi mi-norem, quam FE; & contra in Hyperbola (fig. 11.) debere ipſi T*t* pariter occurrere, ſed ultra dire-ctricem alicubi in *l*. Demum ex punctis L, *l* du-cantur rectæ directrici parallelæ, occurrentes ip-ſis G*g*, H*h*, I*i* in L, M, N, *l*, *m*, *n*.

36. His ita ſemel præparatis, per quodvis punctum S rectæ T*t* jacens in fig. 9. intra ſegmen-tum L*l*, in fig. 10. ab L verſus T, in fig. 11. ex-tra ſegmentum L*l*, ducta recta parallela directri-ci, quæ occurrat rectis G*g*, H*h*, I*i* alicubi in O, R, Q, centro F intervallo RQ, vel RO, quæ ipſi æqua-lis erit, inveniantur in ipſa OQ bina puncta *p*, P: Inveniri autem ſemper poterunt bina, ac bina tantum, & omnia, ac ſola puncta ita inventa una cum punctis M, *m* in Ellipſi, & Hyberbola, & cum puncto M in Parabola erunt ad Sectionem Conicam quæſitam.

37. In primis enim ſi centro F, intervallo RQ, vel RO in recta OQ directrici parallela invenia-tur punctum P, vel *p*, id eſſe debet ad quæſitam Sectionem Conicam, & ſi ſit, ita invenietur. Du-cta enim PD perpendiculari ad directricem, adeo-que parallela RE, cui proinde erit æqualis, erit

erit FP ad PD, ut RQ, vel RO ad RE, ſive ob uV, OQ parallelas FP ad PD, ut FV, vel Fu ad FE, nimirum per conſtructionem in ratione determinante; unde etiam patet ob FV, Fu aſſumptas æquales fore etiam æquales RQ, RO. Si autem P fuerit ad Sectionem Conicam, erit contra FP ad PD, ut FV, vel Fu ad FE; adeoque FP ad PD, ut RQ, vel RO ad RE æqualem PD: adeoque oportebit FP eſſe æqualem RQ, vel RO, & punctum P inveniri centro F, radio RQ; & eadem eſt demonſtratio pro puncto p.

38. Porro per quodvis punctum S rectæ Tt ducta ORQ parallela directrici, invenientur centro F intervallo RQ bina puncta P, p hinc inde ab R, vel unicum congruens cum R, vel nullum, prout RQ fuerit major, vel æqualis, vel minor reſpectu FR. Nam EFR ipſi OQ perpendicularis eſt, cum ſit perpendicularis directrici AB; adeoque circulus centro F deſcriptus, tranſcurrit ultra OQ, eamque ſecat in binis punctis hinc inde a perpendiculo FR, vel contingit in R, vel ad eam non pertingit.

39. Eſt autem FR ſemper æqualis RS, cum angulus FRS ſit rectus, & ob KE, FE æquales, ac angulum KEF rectum, ſit ſemirectus KFE, adeoque & SFR. Ipſa vero RS, aſſumpto S intra limites enunciatos in conſtructione, erit ſemper pars ipſius RQ, vel RO, adeoque minor ipſis: abeunte S in L, vel l, cum ipſis congruet: aſſumpto vero S extra limites enunciatos, erit è contrario RQ, vel RO pars ipſius RS, adeoque RS ipſis major, quod quidem admodum manifeſtum erit in figuris 12, 13, 14.

40. Nam

F.12. 40. Nam in fig. 12. in Ellipſi tota linea *l*T ja-
13. cebit extra angulum GEI, adeoque puncto S aſ-
14. ſumpto in *l*T, erit RQ pars ipſius RS. Quod ſi S aſſumeretur in *l*, congruerent ibi puncta Q, S. Tum tota *l*L iacet intra angulum GEI, adeoque aſſumpto S in *l*F, eſt RS pars ipſius RQ; abeunte S in F, ea evaneſcit; aſſumpto S in FL evadit RS pars ipſius RO, abeunte verò S in L, rurſus conveniunt S, O. At tota L*t* jacet extra angulum GEI, & extra ipſi ad verticem oppoſitum *g*E*i* ita, ut aſſumpto S in LK, ſit RO pars ipſius RS, abeunte S in K, evaneſcat RO, aſſumpto S in K*t* ſit iterum RQ pars RS.

41. In fig. 13. in Parabola eadem prorſus accidunt, cum eo ſolum diſcrimine, quod ob T*t*, I*i* parallelas nuſquam habetur earum concurſus *l*, adeoque tota indefinita LT jacet intra angulum GEI, tota L*t* extra ipſum, & extra *g*E*i* ipſi ad verticem oppoſitum: ac proinde per totam LT eſt RS pars RQ, vel RO, per totam L*t* contra RO, vel RQ pars RS.

42. Demum in fig. 14. in Hyperbola tota pariter LT jacet intra angulum GEI, jacet autem *l* ultra directricem, & tota quidem L*l* jacet extra angulos GEI, *g*E*i*, ſed tota *lt* intra *g*E*i* jacet; adeoque per totam FT eſt RS pars RQ, per FL pars RO, per LK contra RO pars RS, per K*l* vero RQ pars RS,
F.9. & per totam *lt* rurſum RS pars RQ.
10. 43. His omnibus perſpectis patet, aſſumpto S
11. in fig. 9. intra L*l*, in fig. 10. per totam LT, in fig. 11. per totas LT, *lt* inveniri in recta directrici parallela bina puncta ad Sectionem Conicam

quæ-

quæſitam: eo aſſumpto in L, vel *l*, coeuntibus in primo punctis S, O, in ſecundo punctis S, Q, fieri FM, F*m* æquales ML, *ml*, adeoque coire ibi puncta P, *p* in unicum M, vel *m*, in quo nimirum circulus centro F radio ML, vel *ml* deſcriptus rectam MN, vel *mn* contingeret, exiſtente ibidem FM, vel F*m* ad ME, vel *m*E, ut ML, vel *ml* ad ipſas ME, vel *m*E, nimirum ut F*u*, vel FV ad FE, ſive in ratione determinante: at aſſumpto S ubicumque extra eos limites, nullum inveniri punctum: Q.E.D.

Coroll. 1.

44. *Datis foco, directrice, & ratione determinante, datur Sectio Conica.*

45. Patet, cum iis datis, inveniantur omnia ejus puncta.

Coroll. 2.

46. *Ellipſis tota citra directricem jacet, & in ſe ipſam redit: Parabola unicum habet ramum citra directricem in infinitum excurrentem: Hyperbola binos ramos in infinitum excurrentes, alterum citra, alterum ultra directricem.*

47. Patet ex ipſa problematis conſtructione, cum nimirum ex omnibus rectis directrici parallelis omnes, & ſolæ rectæ ductæ in fig. 9. intra limites L*l* occurrant Ellipſi hinc inde a recta M*m* in binis punctis P, & *p*, quæ deinde in M & *m* coeunt; omnes autem, & ſolæ ſecantes infinitam LT in fig. 10. occurrant Parabolæ, ac omnes, & ſolæ in fig. 11. per infinitas LT, *lt* Hyperbolæ occurrant.

Coroll. 3.

48. *Ellipſis, Parabola, & ramus citerior Hyperbolæ contingunt rectas* LN, Lu, NV *in* M, u, V;

Elli-

Ellipſis autem, & ramus ulterior Hyperbolæ rectam ln *in* m.

49. De punctis M, *m* patet; cum ibi puncta P, *p* coaleſcant in unicum, & quævis directrici parallela ex altera parte rectæ LM, vel *lm*, ducta occurrat Sectioni Conicæ in binis punctis hinc inde ab M. De punctis autem V, *u* colligitur ex eo, quod abeunte S in F, abeunt puncta Q, R, Q in *u*, F, V, adeoque in ipſa V*u* invenienda ſunt bina puncta centro F intervallo FV, quæ erunt ipſa V, *u*, evaneſcente nimirum ibidem FR, & factis RP, RQ æqualibus inter ſe, ac ipſi FV. At utcumque parum diſtet OQ ab *u*V utralibet ex parte, ſemper latus RP minus eſt, quam baſis FP, adeoque quam RQ, ac proinde Sectionis Conicæ punctum P utrinque circa V jacet citra rectam NV, & eadem eſt demonſtratio pro *u*.

Coroll. 4.

50. *Sectionis Conicæ perimeter eſt linea curva, nuſquam interrupta.*

51. Eſſe lineam curvam conſtat ex eo, quod recta eſſe non poſſit ea linea, quam plures rectæ ita contingant in unico puncto ſingulæ, ut ipſa utrinque circa contactum jaceat ad eaſdem ejuſdem rectæ partes.

52. Numquam autem interrumpi, patet ex conſtructione ipſa, cum ſatis pateat, puncto S excurrente motu continuo per rectam L*l* in Ellipſi, & per rectas LT, L*t* indefinitas in Parabola, ac Hyperbola, debere punctum P pariter excurrere motu continuo. Sed ſic accuratius demonſtratur.

Si

53. Si alicubi abrumpatur, ut in fig. 15, 16 in P, vel recta SP alteri arcui *p*A occurreret iterum in *p*, ut in fig. 15, vel nuſquam, ut in fig. 16. Primum fieri non poteſt, cum recta directrici parallela nonniſi in unico puncto poſſit occurrere Sectioni Conicæ ad eandem partem rectæ MH (num 38.). Secundum fieri non poteſt, quia ex altero extremo *p* arcus *p*A abrupti ducta *ps* parallela directrici, aliæ parallelæ VO numero infinitæ ductæ per puncta V interpoſita punctis S, *s*, licet interceptæ iis limitibus definitis, in quibus quævis parallela debet occurrere perimetro ſectionis hinc inde a recta MH, ipſi numquam ex ea parte occurrerent. F. 15 16

DEFINITIO II.

54. C*Hordam illam* Vu *per focum ductam, dico* Latus Rectum Principale *Sectionis Conicæ; rectam* Mm *in Ellipſi (fig.* 9 *) & in Hyperbola (fig.* 11 *)* Latus Transverſum Principale, *ſive* Axem Tranſverſum, *ejuſque vertices* M, m, *ac ipſa* Mm *ſecta bifariam in* C, *dico* C Centrum: *erectis autem hinc inde rectis* CX, Cx *perpendicularibus axi tranſverſo, ac mediis geometrice proportionalibus inter* FM, Fm *binas diſtantias foci, a binis verticibus axis tranſverſi, dico* Xx Axem Conjugatum, *ejuſque vertices* x, X. *Rectam autem* MH *indefinitam in Parabola (fig.* 10.*) dico ejus* Axem Tranſverſum, & M *ejus verticem. Sed cum axem dixero, & ejus magnitudinem non definivero, intelligam totam rectam utrinque indefini-* F. 9 10 11

tam, in qua ſunt axium vertices. Rectas axi utrilibet perpendiculares, & ad Sectionis perimetrum utrinque terminatas dico ejus Ordinatas, *ut ſunt chordæ* Pp *reſpectu axis tranſverſi; ſegmentum autem axis interceptum inter ordinatam, & verticem, vel centrum, dico* Abſciſſam *ab eo vertice, vel a centro, ut* MR, mR *ſunt abſciſſæ a verticibus* M, *&* m; *&* CR *abſciſſa a centro.*

SCHOLIUM I.

55. POST haſce definitiones eruemus primo tria Corollaria, quæ ab iis non pendent, niſi in ſola nominum uſurpatione, & debuiſſent continuare ſeriem Corollariorum propoſitionis primæ, cum ex ſola ejus conſtructione ſponte fluant, ſed definitiones interſerendæ fuerunt, ut ea, quorum proprietates enunciantur, ſuis in ipſa enunciatione nominibus appellarentur. Conſequentur Corollaria 4, & 5, quæ erunt proprie Corollaria definitionum lateris recti, & ſemiaxis conjugati, qui hic aſſumptus eſt ita, ut ejus quadratum ſit æquale rectangulo diſtantiarum foci a binis verticibus. Tum Corollarium 6 erit iterum Corollarium propoſitionis primæ, & continebit præcipuam Sectionum Conicarum proprietatem, quæ earum naturam exhibet, & foecundiſſima eſt ita, ut reliqua omnia Corollaria deinde ab ipſa pendeant, & ejus potiſſimum Corollaria ſint. Potuiſſet icciroo enunciari per propoſitionem, tum ob enunciati theorematis dignitatem, tum ob foecunditatem novam, tum icciroo, quod paullo

lo majore ambitu indigeat ad ſui demonſtrationem, binarum nimirum rationum compoſitione. Verum conſultius duximus id quoque Corollariis immiſcere, tum quia vix quidquam ad ſui demonſtrationem poſtulat præter conſtructionem problematis primi, tum quia proprietatem enunciat axis tranſverſi, quam deinde inveniemus generalem & axi conjugato, & diametris omnibus, (quæ in quavis Sectione Conica infinitæ ſunt) & in propoſitione 6 enunciabimus.

Coroll. 1.

56. *Axis tranſverſus bifariam ſecat ſuas ordinatas, & ſecat tam aream, quam perimetrum Sectionis Conicæ terminatæ quavis ordinata in duas partes prorſus æquales, & ſimiles.*

57. Nam ordinata P*p* eſſet chorda circuli deſcripti centro F, radio FP, adeoque (Coroll.4 prop.5. Geom.) a perpendiculo FR per centrum ducto ſecatur bifariam. Inde autem patet, totam Figuram MPR, vel *m*RP converſam circa axem tranſverſum debere prorſus congruere figuræ MR*p*, vel *m*R*p*, cum quævis ſemiordinata RP debeat ob angulos ad R rectos congruere ſibi æquali R*p*.

Coroll. 2.

58. *Omnium foci radiorum minimus in Ellipſi eſt is, qui terminatur ad verticem axis tranſverſi propiorem, maximus, qui ad remotiorem, reliqui eo minores, vel majores, quo ad illum, vel hunc verticem accedunt magis puncta perimetri, ad quæ terminantur: in Parabola, & utrovis Hyperbolæ ramo ille minimus, qui ad axis verticem terminatur in eo ramo ſitum; reliqui eo*

majores, quo terminantur ad puncta ab eodem vertice remotiora, nec niſi hinc inde bini æquales haberi poſſunt in eodem hinc inde angulo ab ipſo axe tranſverſo,

59. Nam radius foci FP, cum habeat ad PD, ſive RE rationem conſtanter eandem (num. 1.), creſcet, vel decreſcet, ut ipſa ER. Patet autem abeunte P in M, vel *m*, abire pariter R in eadem puncta, recedente P ab M, vel *m*, recedere & R ab iiſdem, ac proinde ipſarum ER in Ellipſi, Parabola, & ramo citeriore Hyperbolæ minimam eſſe ipſam EM, tum vero perpetuo creſcere in his quidem in infinitum, in Ellipſi vero donec in *m* evadat maxima, ac pariter in ramo ulteriore Hyperbolæ in fig. 11. fore omnium FR' minimam F*m*, tum eas in receſſu puncti P ab *m* creſcere in infinitum. Binæ vero FP, F*p*, quæ ſolæ communem RE habent, jacebunt hinc inde in angulis RFP, RF*p* æqualibus ob FR communem, & latera RP, R*p*, ac FP, F*p* æqualia.

Coroll. 3.

60. *Differentia dimidii lateris recti principalis, & radii foci in Ellipſi, Parabola, ac ramo citeriore Hyperbolæ, ſumma in ulteriore ad diſtantiam ordinatæ a foco eſt in ratione determinante.*

61. Cum enim ſit & FP, ad RE, & FV ad FE in ea ratione, erit & illarum differentia, vel ſumma ad harum differentiam, vel ſummam in ratione eadem (cap. 2. Arit. n. 13.). Porro diſtantia FR ordinatæ P*p* a foco F eſt ubique differentia ipſarum ER, EF, & in ramo ulteriore Hyperbolæ in fig. 11. eſt FR' ſumma ipſarum ER', EF.

Co-

Coroll. 4.

62. *Dimidium latus rectum principale ad diſtantiam foci a directrice eſt in ratione determinante, & in Parabola latus rectum principale eſt duplum ejus diſtantiæ, quadruplum tum diſtantiæ foci a vertice, tum diſtantiæ verticis a directrice.*

63. Patet primum ex ipſa conſtructione prop. 1. cum ſit FV ad FE in ratione determinante. Porro in Parabola ea eſt ratio æqualitatis, & FM, ME æquantur inter ſe. Patent igitur & reliqua.

Coroll. 5.

64. *Quadratum ſemiaxis conjugati æquatur differentiæ quadratorum ſemiaxis tranſverſi, & diſtantiæ foci a centro, exiſtente illo majore in Ellipſi, minore in Hyperbola; ac quadratum diſtantiæ foci a centro æquatur in Ellipſi differentiæ quadratorum ſemiaxium, exiſtente ſemiaxe tranſverſo ſemper majore, in Hyperbola eorum ſummæ.*

65. Patent ex eo, quod ex definitione ipſa quadratum ſemiaxis conjugati debeat eſſe æquale rectangulo MF*m*, & ob M*m* ſectam bifariam in C, quadratum CM (*Coroll.* 2 & 5 prop. 13. Geom.) æquetur in Ellipſi, ubi CF eſt minor quam CM, quadrato CF, & rectangulo MF*m* ſimul. At in Hyperbola, ubi CF eſt ſemper major, quam CM, quadratum CF æquatur quadrato CM, & rectangulo MF*m* ſimul.

Coroll. 6.

66. *Quadratum ſemiordinatæ axis tranſverſi æquatur in Parabola rectangulo ſub abſciſſa a*

vertice, & quadrupla diſtantia foci ab ipſo vertice, ſive ſub eadem abſciſſa, & latere recto principali: in Ellipſi vero & Hyperbola eſt ad rectangulum ſub binis abſciſſis, ut quadruplum rectangulum ſub binis diſtantiis foci a binis verticibus ad quadratum axis tranſverſi, ſive ut quadratum axis, vel ſemiaxis conjugati ad quadratum axis, vel ſemiaxis tranſverſi, ſive ut latus rectum principale ad latus tranſverſum, quæ rationes omnes æquales ſunt.

67. Nam ob OQ ſectam bifariam in R, & non bifariam in S, erit (Coroll.4. 5. prop. 13. Geom.) quadratum RS cum rectangulo OSQ ſimul æquale quadrato RQ, ſive quadrato FP, ſeu quadratis FR, RP. Cum igitur & quadratum RS æquetur quadrato RF ob ipſas RS, RF æquales (num.39.), erit & quadratum RP æquale rectangulo OSQ.

68 Eſt autem in fig. 10. SQ æqualis FV dimidio lateri recto *u*V, & æqualis LN, ſive duplæ LM, nimirum (cum ob angulum LMF rectum, & LFM ſemirectum (num.39.) æquentur inter ſe MF, ML) duplæ FM. Ducta vero L*y* normali ad OS, quæ proinde erit parallela & æqualis abſciſſæ MR, erunt O*y*, *y*S ipſi æquales. Nam triangula S*y*L, O*y*L ſimilia ſunt triangulis NME, LME ob ſingula latera ſingulis lateribus parallela, adeoque ut NM, LM æquantur MF, ſive ME, ita & S*y*, O*y* æquantur *y*L. Erit igitur OS dupla L*y*, ſive dupla abſciſſæ MR, & rectangulum OSQ, ſive quadratum illud ſemiordinatæ RP æquale rectangulo ſub dupla abſciſſa MR æquali duplæ L*y*,

ſive

ſive toti OS, ac dimidio latere recto FV æquali SQ, adeoque æquale rectangulo ſub abſciſſa MR, & toto latere recto *u*V, ſive rectangulo ſub abſciſſa, & quadrupla diſtantia FM foci a vertice.

69. Ducta autem pariter L*y* in fig.9, & 11, quæ, ſi opus ſit, producta occurrat rectæ *lu* in Y, erit OS ad *nl* duplam *ml*, ſive duplam *m*F (num. 43.), ut LS ad L*l*, ſive ut L*y* ad LY, vel ut MR ad M*m*; & SQ ad LN duplam LM, vel pariter duplam MF, ut S*l* ad L*l*, ſive ut *y*Y ad LY, vel ut R*m* ad M*m*. Igitur conjunctis rationibus, erit rectangulum ſub OS, & SQ, ſive quadratum RP ad quadruplum rectangulum ſub MF, & F*m*, ut rectangulum ſub MR, & R*m* ad quadratum M*m*, vel alternando quadratum ſemiordinatæ RP ad rectangulum MR*m* ſub abſciſſis, ut quadruplum rectangulum MF*m* ſub binis diſtantiis foci a verticibus ad quadratum axis tranſverſi M*m*.

70. Porro cum CX, C*x* ſint mediæ inter FM, F*m* (num.54.), erit quadratum CX, vel C*x* æquale rectangulo MF*m*, & proinde quadratum totius axis conjugati X*x* æquale quadruplo rectangulo MF*m*, adeoque ratio ejus quadrupli rectanguli ad quadratum axis tranſverſi eadem eſt, ac ratio quadrati axis, vel ſemiaxis conjugati ad axem, vel ſemiaxem tranſverſum quadratum.

71. Demum cum ipſa FV ſit ſemiordinata, & FM, F*m* abſciſſæ a verticibus, erit quadratum FV ad rectangulum MF*m*, ſive ad quadratum CX, ut ipſum quadratum CX ad quadratum CM:

ac proinde FV, CX, CM ſunt continue proportionales, & earum dupla Vu latus rectum principale, xX axis conjugatus, Mm axis tranſverſus ſunt continue proportionales, adeoque ratio primi ad tertium, eſt eadem, ac ratio quadrati ſecundi ad quadratum tertii.

Coroll. 7.

72. *Vertices axis conjugati in Ellipſi ſunt in ipſa ejus perimetro.*

73. Nam quadratum ſemiordinatæ per centrum ductæ ad rectangulum ſub MC, Cm, quæ ſunt ejus abſciſſæ, ſive ad quadratum CM, debet eſſe, ut quadratum ſemiaxis conjugati CX ad quadratum idem ſemiaxis tranſverſi CM. Ac proinde ſemiordinata per centrum ducta æquatur ipſi CX, & punctum X eſt ad perimetrum, ac eadem eſt demonſtratio pro x.

Coroll. 8.

74. *Quadrata ſemiordinatarum axis tranſverſi ſunt in Parabola, ut abſciſſæ a vertice, in Ellipſi, & Hyperbola, ut rectangula ſub binis abſciſſis a verticibus.*

75. Erit enim quadratum unius ordinatæ in Parabola ad quadratum alterius, ut rectangulum ſub abſciſſa illius, & latere recto principali ad rectangulum ſub abſciſſa hujus, & eodem (num.66.), ac idem illud latus rationem non mutat.

76. In Ellipſi autem, & Hyperbola erit quadratum unius ſemiordinatæ ad rectangulum ſub ſuis abſciſſis, ut quadratum alterius ad rectangulum ſub

ſub ſuis : adeoque alternando erunt illa quadrata, ut illa rectangula.

Coroll. 9.

77. *Perimeter Parabolæ, & utriuſque rami Hyperbolæ utrinque ab axe tranſverſo recedunt ultra quoſcumque limites.*

78. Nam abſciſſa MR in illa, & utraque abſciſſa MR, *m*R' in hac creſcunt ultra quoſcumque limites, adeoque & ſemiordinatarum quadrata ultra quoſcumque limites creſcunt.

Coroll. 10.

79. *Semiordinatæ axi tranſverſo æque diſtantes a centro, vel a reſpectivis verticibus ſunt æquales inter ſe in Ellipſi, & Hyperbola, quo autem centro propriores, eo majores in Ellipſi, minores in axe tranſverſo Hyperbolæ.*

80. Erunt enim in ordinatis æque diſtantibus binæ abſciſſæ unius æquales binis abſciſſis alterius, abſciſſa nimirum unius a vertice M, abſciſſæ alterius a vertice *m*, & viceverſa, adeoque rectangula ſub abſciſſis æqualia, & æqualia ſemiordinatarum quadrata. At cum rectangulum MR*m* ſit differentia quadratorum CM, CR, quo minor erit CR in Ellipſi, eo major erit exceſſus quadrati CM ſupra ejus quadratum; & in Hyperbola eo minor ejus quadrati exceſſus ſupra quadratum CM. Quare eo ibi majus, hic minus rectangulum MR*m*, & proinde etiam quadratum ſemiordinatæ, & ipſa ſemiordinata.

Co-

Coroll. 11.

81. *Quævis recta in Ellipſi, & Hyperbola per centrum ducta, & ad perimetrum utrinque terminata, in ipſo centro biſariam ſecatur.*

F.17 18 82. Ducta enim in fig. 17, 18 quavis PC ad centrum, ac ſemiordinata PR axis tranſverſi, tum aſſumpta C*r* æquali CR, & erecta ad partes oppoſitas ſemiordinata *rp*, ac ducta C*p*, erit *rp* æqualis RP ob diſtantias C*r*, CR æquales. Igitur ob angulos ad R &, *r* alternos æquales, erunt in trangulis PRC, *pr*C æquales & anguli ad C, & rectæ PC, *p*C, ac proinde cum recta PC producta debeat efficere angulum ad verticem oppoſitum æqualem angulo RCP, debebit abire in ipſam C*p*, & terminari ad *p*, ac in ipſo centro ſecari bifariam.

Coroll. 12.

83. *In Ellipſi, & Hyperbola axis conjugatus omnes ſuas ordinatas biſariam ſecat, & ejus ordinatæ æque diſtantes a centro æquales ſunt, quo autem remotiores a centro, eo in Ellipſi minores, in Hyperbola majores, ac in Hyperbola quævis ordinata axi conjugato major axe tranſverſo.*

F.19 20 84. Sumptis enim, in fig. 19, 20, CR, C*r* in axe tranſverſo æqualibus, ſemiordinatæ RP, *rp* ad eandem axis partem ductæ æquales erunt inter ſe. Quare & P*p* jungens ipſas parallelas, & æquales erit parallela, & æqualis R*r*, cui cum perpendicularis ſit axis X*x*, erit & ipſi P*p* perpedicularis, quam habebit pro ſua ordinata, & ſecabit in I ita, ut PI, *p*I æquentur ipſis CR, C*r* inter

inter ſe æqualibus, adeoque & inter ſe æquales ſint. Completis autem ordinatis PP′, pp′ axi tranſverſo, erit eodem argumento P′p′ ordinata axi conjugato. Patet autem fore æquales P′p, Pp′, & earum diſtantias CI, CI′ a centro C æquales æqualibus ſemiordinatis RP, RP′ axis tranſverſi. Quo autem diſtantia CI fuerit major, eo ſemiordinata RP axis tranſverſi erit major adeoque ejus diſtantia CR a centro eo minor in Ellipſi, major in Hyperbola, & proinde eo ibi minor, hìc major etiam ſemiordinata IP axis conjugati, & tota ordinata Pp. Cumque in Hyperbola quævis CR abſciſſa axis tranſverſi a centro major ſit ſemiaxe CM, erit quævis ſemiordinata PI axi conjugato major ipſo ſemiaxe tranſverſo CM, & tota ordinata Pp major toto axe Mm.

Coroll. 13.

85. *Quadratum ſemiordinatæ axi conjugato ad ſummam in Hyperbola, & differentiam in Ellipſi quadratorum ſemiaxis tranſverſi, & abſciſſæ a centro, vel in hac ad rectangulum ſub binis abſciſſis a binis verticibus eſt, ut quadratum ſemiaxis, vel axis tranſverſi ad quadratum ſemiaxis, vel axis conjugati.*

86. Eſt enim (num. 66.) quadratum RP, ſive CI ad rectangulum MRm, ut quadratum CX ad quadratum CM, adeoque alternando quadratum CI ad quadratum CX, ut rectangulum MRm ad quadratum CM. Porro ob Mm ſectam bifariam in C (Coroll. 2. 5. pro poſ. 13. Geom.) in fig. 19 quadratum CM eſt æquale quadrato CR, & rectangulo MRm. At in fig. 20. quadratum CR æquale quadrato CM, & rectan-

rectangulo MRm. Igitur ibi dividendo erit differentia quadratorum CI, CX, vel rectangulum XIx, hic componendo, eorum ſumma ad quadratum CX, ut quadratum CR ad quadratum CM, & alternando, tum invertendo quadratum CR ſive PI ad ſummam in Hyperbola quadratorum CI, CX, differentiam in Ellipſi, vel in hac ad rectangulum XIx, ut quadratum CM ad quadratum CX, vel ut quadratum Mm ad quadratum Xx.

Coroll. 14.

87. *Axis conjugatus Ellipſim ſecat in duas partes prorſus æquales, & ſimiles; ac bini Hyperbolæ rami ſunt prorſus inter ſe æquales & ſimiles, & tam Ellipſis, quam Hyperbola alium focum habent, ac directricem æque diſtantes a centro, & ab alternis verticibus, ac habentes eaſdem prorſus proprietates, quas prior focus, & prior directrix.*

88. Si enim ſuper axe xX convertatur dimidia figura 19, 20 ita, ut abeat punctum m in M, abibit quævis rp in RP, & Ip, in IP, adeoque Semiellipſis xmX in xMX, ac tam in Ellipſi, quam in Hyperbola mp in MP.

89. Quod ſi captis Cf, Ce æqualibus, & oppoſitis CF, CE, ductaque aeb perpendiculari axi tranſverſo, tota figura convertatur circa axem conjugatum xCX, abibit aeb in locum AEB, m in locum M, f in locum F, & viceverſa: quævis autem perimetri puncta adhuc erunt in locis, in quibus alia perimetri puncta erant ante. Adeoque omnia, quæ reſpectu omnium perimetri punctorum verificabantur de foco F, & directrice AB, jam verificabuntur de foco f, & directrice ab.

Por-

Porro ob CM, C*m*, ac CF, C*f*, & CE, C*e* æquales inter ſe, erunt pariter inter ſe æquales & ME, *me*, & MF, *mf*, & M*e*, *m*E.

Coroll. 15.

90. *In Ellipſi, & Hyperbola diſtantia focorum a ſe invicem, axis tranſverſus, & diſtantia binarum directricum a ſe invicem, ſive diſtantiæ centri a foco, a vertice axis tranſverſi, & a directrice ſunt continuè proportionales in ratione determinante.*

91. Cum enim recta FE per focum ducta occurrat Sectioni Conicæ in punctis M, *m*; jacente altero M inter puncta F, E, quatuor puncta *m*, F, M, E conſtituent proportionem harmonicam, (num.8.), adeoque cum M*m* ſecta ſit bifariam in C, erunt (num.22.) CF, CM, CE continue proportionales in ratione FM ad ME, nimirum in ratione determinante: ac in eadem ratione erunt eorum dupla F*f*, M*m*, E*e*.

Coroll. 16.

92. *Si e quovis perimetri puncto ad binos focos ducantur binæ rectæ, erit earum ſumma in Ellipſi, differentia in Hyperbola æqualis axi tranſverſo.*

93. Ducta enim per P recta axi tranſverſo parallela, quæ binis directricibus occurrat in D, d, erit tam FP ad PD, quam *f*P ad P*d* in ratione determinante, ſive ut M*m* ad E*e*. Quare ipſarum ſumma in Ellipſi (fig.19) differentia in Hyperbola (fig.20) ad D*d* ſummam in illa, differentiam in hac ipſarum PD, P*d*, erit pariter, ut M*m* ad E*e*. Cum igitur D*d*, E*e* æquales ſint, erit & ipſa-

ipſarum FP, fP ſumma in Ellipſi, differentia in Hyperbola æqualis axi tranſverſo Mm.

Coroll. 17.

94. *Si ad extrema puncta Chordæ axi tranſverſo parallelæ ducantur ad eundem focum binæ rectæ, earum ſumma in Ellipſi, differentia in Hyperbola æquatur axi tranſverſo.*

95. Ducta enim Fp, patet ipſam debere æquari fP, cum converſa figura circa axem conjugatum abeat F in f, & P in p. Quare ſumma vel differentia binarum FP, Fp erit eadem, ac binarum FP, fP.

Coroll. 18.

96. *Si ad extrema puncta rectæ per centrum ductæ, & ad perimetrum utrinque terminatæ, ducantur in Ellipſi, & Hyperbola ex eodem foco binæ rectæ, earum ſumma in Ellipſi, differentia in Hyperbola æquabitur axi tranſverſo.*

F. 21 97. Nam in triangulis pCF, PCf, erunt la-
22 tera CP, Cf æqualia lateribus Cp, CF, & anguli ad C ad verticem oppoſiti æquales. Quare & Pf, pF æquales erunt. Cum igitur ſumma in Ellipſi, differentia in Hyperbola rectarum PF, Pf æquetur axi tranſverſo, æquabitur eidem etiam ibi ſumma, hic differentia rectarum FP, Fp.

Coroll. 19.

98. *Differentia in Ellipſi, ſumma in Hyperbola laterum recti, & tranſverſi ad diſtantiam focorum ſunt in eadem ratione determinante, in qua eſt ea diſtantia ad axem tranſverſum, & is ad diſtantiam directricum.*

F. 19 99. Eſt enim (num. 60) differentia in Ellipſi,
20 ſumma in Hyperbola rectæ fP, & dimidii lateris

ris recti, nimirum & F*u*, ad *f*R in ea ratione. Porro abeunte P in V, abit R in F, & evadit *f*R ipſa diſtantia focorum F*f*, recta vero FP abit in FV. Quare in Ellipſi differentia *f*P ab F*u* evadit differentia binarum *f*P, PF ſive (num.92) totius axis tranſverſi, a toto latere recto VF*u*; at in Hyperbola cum *f*P contineat axem tranſverſum, & PF (num.92), ſive in eo caſu axem tranſverſum, & FV, erit ſumma *f*P, & F*u* in eo caſu ſumma axis tranſverſi, & totius V*u*.

Coroll.20.

100. *Si facto centro in altero foco* f *Ellipſeos* in fig.23, *vel Hyperbolæ in fig.* 24, *intervallo* fE, *vel* fe *æquali axi tranſverſo deſcribatur circulus, & ex quovis puncto* P *perimetri Ellipſeos, vel Hyperbolæ ducantur binæ rectæ altera* PF *ad alterum focum* F, *altera* PD *perpendicularis periphæriæ ipſius circuli in Ellipſi ad partes oppoſitas ejus centro* f, *in Hyperbola verſus ipſum, donec ipſi peripheriæ occurrat citra* f *in* D, *ut* PD, *vel ultra in* d, *ut* pd, *prout punctum perimetri jacuerit, ut* P, *in eodem ramo cum* F, *vel in oppoſito, ut* p, *erunt ſemper eæ rectæ æquales.* F.23 24

101. Nam periphæriæ circuli perpendiculares lineæ ſunt radii, qui per centrum *f* tranſeunt; in Ellipſi autem binæ *f*P, FP æquantur toti *f*D (num.91.), adeoque remanet FP æqualis PD. In Hyperbola vero *f*P excedit FP per differentiam æqualem axi tranſverſo (num. 91), adeoque æqualem *f*D. Quamobrem erit FP æqualis reſiduæ PD, & cum F*p* excedat *pf* per axem tranſver-

ſver

ſverſum æqualem *fd*, eo addito, erit *Fp* æqualis *pd*.

SCHOLIUM II.

102. EST ſatis elegans ejus circuli analogia cum directrice Parabolæ. In fig.1. ſi ea Parabolam referat, diſtantia perpendicularis PD a directrice rectilinea AB æquatur diſtantiæ FP a foco F. Hic in fig.23, 24. diſtantia perpendicularis PD a peripheria circuli curvilinea AEB idem præſtat, cum æquetur diſtantiæ FP, & cum ipſa directrix in Parabola directionem non mutet, in Ellipſi eſt cava verſus F, in Hyperbola convexa.

103. Ex tam multis vero, quæ huc uſque ex ipſa prima definitione fere ſponte profluxerunt, jam hinc patet, quam apta ſit definitio a nobis aſſumpta ad percipiendam Sectionum Conicarum naturam, atque indolem. Earum autem formam multo ſibi evidentius oculis ſubjiciet Tyro, ſi curvas ipſas hujus problematis ope delineaverit, ac, ſi ductum perpendet, naturam intelliget. Delineabit autem admodum facile hoc pacto.

F.25 104. Facto quovis angulo acuto GEI, ut in
26 fig.25, vel recto, ut in fig.26, vel obtuſo, ut in
27 fig.27, ac bifariam ſecto per rectam EH, aſſumatur in ea pro foco punctum F ad arbitrium, ducaturque recta T*t*, quæ cum H*b* faciat angulum ſemirectum, quæ quidem alteri lateri anguli aſſumpti, ut EG, occuret alicubi in L, alteri vero, ut EI, occurret in *l* ad eaſdem partes in fig.25, erit parallela in fig.26, occurret in *l* ad partes oppoſi-

poſitas in fig.27, lateri nimirum IE producto verſus *i*. Nam ubi angulus GEI eſt rectus, ut in fig.26, angulus HEI erit ſemirectus, & æqualis externo HFT, adeoque FT, EI parallelæ erunt, ubi vero eſt acutus angulus GEI, ut in fig.25, erit HEI ſemirecto minor; ubi ille obtuſus, ut in fig.27, erit hic ſemirecto major; ac proinde EI, FT ibi convergent, hic vero divergent, convergentes ex parte oppoſita *t*, *i*.

105. Aſſumptis autem in lateribus EI, EG, vel E*g* ſegmentis EN, E*n* æqualibus ipſis EL, E*l*, & applicata regula in LN, *ln* definientur puncta M, *m* vertices axis tranſverſi; tum aſſumptis pluribus EO, EQ æqualibus in ipſis lateribus anguli GEI inter puncta L, *n*, & N, *l* in fig.25, a punctis L, N verſus G, I in fig.26, ab ipſis verſus G, I, & a punctis *l*, *n* verſus partem oppoſitam *g*, *i* in fig.27, ac applicata ſemper regula ad puncta O, Q, quæ rectæ HE*b* occurret in R ita, ut ob iſoſceliſmum trianguli OEQ, & angulum ad E ſectum bifariam, ipſa OQ ſecetur ibi bifariam, & ad angulos rectos; centro R intervallo RQ, vel RO inveniantur bina puncta P, *p* hinc inde. Pluribus demum punctis ita inventis delineari per ipſa poterit Sectio Conica, quæ determinatis præterea punctis *u*, V per rectam ipſi EH perpendicularem facilius quam alibi delineabitur circa puncta *u*, V, M, *m* ſequendo ductum rectarum E*u*, EV, LN, *ln*, quas in iis punctis debet curva contingere.

106. Porro collata hac conſtructione cum figuris 9, 10, 11, & cum ſolutione problema-

C tis,

tis, facile patebit rem eodem redire. Recta autem FM, ſive LM erit minor, vel æqualis, vel major reſpectu ME, prout angulus LEM fuerit ſemirecto minor, æqualis, vel major, nimirum prout totus GEI fuerit acutus, rectus, vel obtuſus; ac proinde in primo caſu obveniet Ellipſis, in ſecundo Parabola, in tertio Hyperbola.

107. Quod ſi manente angulo mutaverit diſtantiam foci a vertice anguli E, perſpiciet ſimul manere penitus curvæ formam, & mutari ſolam magnitudinem. Et quidem ſi binas ejuſmodi figuras deſcripſerit, ac aſſumpſerit ſemper rectas EQ, EO in eadem ratione utrobique ad rectas EN, EL, facile perſpiciet, manere angulos omnes, & omnia ſemper obvenire utrobique ſimilia; at mutato angulo GEI, ſtatim forma ipſa curvæ mutabitur, ita, ut manentibus punctis F, M, & accedente E ad M is accedat ad rectum, Ellipſis oblongetur per omnes magnitudinum gradus, donec, eo evadente recto, deſinat in Parabolam, vertice *m* ita in infinitum recedente, ut nuſquam jam ſit, ac eodem facto obtuſo mutabitur Parabola in Hyperbolam, vertex *m* regredietur ex infinito ex parte oppoſita, ac bini Hyperbolæ rami erunt quodammodo veluti quædam Ellipſeos jam pluſquam infinitæ dimidia oppoſitas oras ſpectantia. Inde autem patebit & affinitas quædam Ellipſeos in immenſum oblongatæ cum Parabola, qua fit, ut in Aſtronomia motus Cometarum in Ellipſibus maxime oblongis habeantur pro Parabolicis, ſine ullo er-

errore notabili in eo arcu, qui eſt proximus foco, ac vertici nobis conſpicuo.

108. Quoniam vero ab angulo LEM pendet ratio LM ad ME, ſive ratio illa determinans FM ad ME, & ille ab hac; patet omnes Parabolas fore inter ſe ſimiles, cum in iis angulus ſit ſemper rectus; Ellipſes vero fore inter ſe ſimiles, & Hyperbolas inter ſe, ſi ratio determinans fuerit F.9
eadem. Nimirum ſi in fig.9, 10, 11, maneat 10
ratio determinans, & mutetur utcumque diſtan- 11
tia FE a directrice, rectæ omnes FP in dato angulo inclinatæ ad ipſam FE, ſive ad axem transverſum ex eadem parte verticis M, mutabuntur in eadem ratione. Si enim ſint binæ ejuſmodi Sectiones Conicæ, erit in utraque FP ad PD ſive RE in eadem ratione, ob eandem rationem determinantem, & PF ad FR ob æquales angulos in triangulis FRP, adeoque & FP ad FE ſummam vel differentiam FR, RE, prout R cadat intra FE, vel extra, in eadem ratione erit, & proinde etiam FP in una ad FP in altera conſtanter, ut FE in illa ad FE in hac. Quin imo cum ratio CF ad CM in Ellipſi, & Hyperbola ſit eadem, ac ratio determinans (num.90); ea manente, manebit eadem ratio quadrati CM ad quadratum CF, adeoque & ad eorum differentiam, nimirum ad quadratum ſemiaxis conjugati, (num.64) & viceverſa. Quare ſi in pluribus Ellipſibus, vel Hyperbolis fuerit eadem ratio ſemiaxium, vel axium, adeoque & ratio lateris recti principalis ad tranſverſum, illæ erunt inter ſe ſimiles; diſſimiles, ſi diverſa.

 109. Quod

109. Quod ſi rectæ Ii, Gg manentibus punctis F, L, M, N in fig.25 evadant parallelæ, & puuctum E, ac directrix nuſquam jam ſit, Ellipſis mutatur in circulum, coeuntibus foco f,
F.28 & centro C cum F, ac fig.25 abit in fig.28, in qua cum RQ ſit ſemper æqualis eidem FV, vel MN, punctum P eſt ſemper ad circulum deſcriptum radio eodem FV, ac centro F. Quamobrem circulus quidem eſt quædam velut Ellipſis, cujus foci coeant, ſed ejus directrix ita in infinitum recedit, ut nuſquam jam ſit, & ejus ratio determinans ita in infinitum decreſcit, ut penitus evaneſcat, & ſit prorſus nulla; adeoque definitio a nobis aſſumpta ipſi revera in Geometrica ſaltem, ac reali conſideratione aptari non poſſit, ut in Scholio 1. poſt ipſam Definitionem 1. innuimus.

110. Atque hoc quidem pacto Conicæ Sectiones in ſe invicem transformantur, vel in circulum. Poſſunt autem & ad rectas lineas, & ad punctum
F.9 ita accedere, ut demum in eas deſinant. Nam ſi
10 potius manente foco F, (fig.9.10.11.) & directri-
11 ce, adeoque puncto E, minuatur in caſu Ellipſeos ratio determinans in infinitum, & penitus evaneſcat, accedentibus in infinitum punctis V, u ad F, ac recidentibus demum in ipſum; latera IEi, GEg accederent ad axem EFH in infinitum, & in ipſum reciderent, ac interea tota Ellipſis contraheretur verſus focum F, & in ipſum unicum punctum deſineret. Si vero in caſu Hyperbolæ ratio creſceret in immenſum, & conciperetur jam omnes finitarum magnitudinum limites tran-

tranſgredi, recedentibus punctis *u*, V in infinitum ita, ut nuſquam jam ſint; latera ipſa IE*i*, GE*g* accederent ad directricem conſideratam poſitionibus AEB, BEA, ac demum in ipſam reciderent, utroque Hyperbolæ ramo interea ſe expandente, ac verticibus M, *m* accedentibus ad ejus punctum E ita, ut demum in ipſum reciderent, & abeuntibus ramis ipſis in directricem. Si demum manente directrice, & ratione determinante, focus F ita accedat ad directricem, ut demum in eam recidat in E; patet ex numer. 16., Ellipſim quidem debere abire in ipſum unicum punctum E, Parabolam in rectam axi perpendicularem EFH, Hyperbolam in binas rectas ita inclinatas directrici, ut radius ad ſinum inclinationis ſit in ratione determinante. Nam ſi contra focus F recedat ultra quoſcunque limites ita, ut nuſquam jam ſit, ſecum avehet & rectam T*t*, & axium vertices, & totas curvas in infinitum, quo demum obrutæ nuſquam jam erunt. Proderit autem plurimum haſce tranſformationes locorum Geometricorum contemplari, quibus vis quædam, atque admirabilis Geometriæ indoles intimius aliquanto perſpicitur.

SCHOLIUM III.

111. QUoniam de Sectionum Conicarum ſimilitudine mentio injecta eſt ſuperiore Scholio, non erit abs re pauca quædam de figurarum ſimilitudine hic demonſtrare, futura uſui tum in Sectionibus Conicis, tum in omni

F.29 late Geometria. *Sint in fig.* 29, 30, 31 *binæ re-*
30 *ctæ datæ* FG, fg, *& ad binas figuras cujuſcum-*
31 *que formæ* FADB, fadb *ductis utcunque* FE, fe, *quæ faciant angulos* GFE, gfe *ſemper æquales, & vel ſemper ad eaſdem plagas, ut exhibent fig.* 29, *ac* 30, *vel ad oppoſitas, ut* 29, *ac* 31, *ſit autem ſemper* FE *ad* fe *in data ratione; ejuſmodi figuras dico* Similes, *in primo caſu* Directe, *in ſecundo* Contrarie, *& rectas illas* FE, fe Latera Homologa, *eas autem ipſas, vel quaſvis alias facientes cum iis, vel cum* FG, fg *angulos æquales ad eaſdem pariter plagas, vel ad oppoſitas, dico rectas* Poſitione Homologas, *quæ ſi aſſumantur pariter in illa conſtanti ratione, eaſdem dico pariter* Latera Homologa, *vel rectas etiam* Magnitudine Homologas, *puncta vero illa* F, f *dico itidem* Homologa.

112. *Si ductis utcumque* FC, fc *magnitudine & poſitione homologis, factis nimirum angulis* GFC, gfc *æqualibus, & captis* FC, fc *in illa conſtanti ratione, erunt &* C, c *puncta homologa, ac rectæ* CE, ce *pariter in iiſdem angulis ductæ ad ipſas* CF, cf *incurrent in puncta homologa* E, e, *& erunt in eadem illa ratione conſtanti, nimirum erunt & poſitione, & magnitudine homologæ.*

113. Ductis enim FE, *fe* in angulis æqualibus ad FG, *fg*, adeoque & ad FC, *fc*, tum EC, *ec*, erunt in triangulis FEC, *fec* tam anguli ad F, *f* æquales, quam latera FE, FC proportionalia lateribus *fe*, *fc*, adeoque ipſa triangula ſimilia, & anguli FEC, *fec* æquales,

ac

ac latera CE, *ce* in eadem illa ratione. Quamobrem rectæ ex C, *c* in æqualibus angulis ductæ ad CF, *cf* congruent cum ipſis CE, *ce*, & incident in illa puncta homologa.

114. Patet, illa ipſa puncta E, *e* fore homologa, cum & FE, *fe* inclinentur ad FG, *fg* in angulis æqualibus, & ſint in illa conſtanti ratione: ac datis in ſingulis figuris ſingulis punctis homologis, cum rectis per ea tranſeuntibus, & poſitione homologis, ac ratione illa conſtanti poſſe inveniri infinita alia numero puncta homologa, & rectas, quæ bina puncta homologa binarum figurarum conjungunt, fore pariter homologas & poſitione, & magnitudine, ac facile colligitur binas rectas, quæ bina puncta conjungunt in una, ad aliam, quæ in ea conjungunt alia bina quævis, debere inclinari in eodem angulo, in quo in altera inclinantur rectæ jungentes puncta iis homologa: ac triangula ad terna quævis homologa puncta terminata fore ſimilia.

115. *Si altera e figuris ſimilibus habuerit rectam aliquam pro perimetro, habebit & altera rectam ipſi & poſitione, & magnitudine homologam, ac ſi binæ ejuſmodi rectæ concurrant in ſingulis figuris angulos æquales conſtituent.*

116. Sit enim ejuſmodi recta EB in prima e figuris (29), & ductis FE, FB, & ad quodvis ejus punctum I recta FI, ducantur in ſecunda (30, vel 31) rectæ *fe*, *fb* homologæ ipſis FE, FB tum poſitione tum magnitudine, eruntquæ puncta *e*, *b* in perimetro ſecundæ figuræ, ac homologa ipſis E, B; adeo-

que ducta *eb* erit & poſitione, & magnitudine homologa EB, ac angulus *feb* æqualis angulo FEB. Facto igitur angulo *efi* æquali EFI verſus *b*, donec recta *fi* occurrat rectæ *eb* in *i*, erunt ſimilia triangula EFI, *efi*, adeoque & FI ad *fi* in ea ratione conſtanti, adeoque & punctum *i* erit in perimetro ſecundæ figuræ, ac homologum I. Quare ſecunda figura habebit pro perimetro rectam *eb*, & ſi prima habuerit plures rectas, ſecunda habebit totidem iis homologas, & in iiſdem angulis ad ſe invicem inclinatas.

117. *Si prima figura habuerit perimetri partem aliquam curvilineam, habebit & ſecunda, ac chordæ per bina ſingularum puncta homologa ductæ, cum rectis quibuſvis homologis continebunt angulos æquales, eruntque & poſitione, & magnitudine homologæ, ac tangentes indefinitæ per puncta homologa ductæ erunt poſitione homologæ; ipſi vero arcus punctis homologis terminati erunt in eadem illa ratione conſtanti, quos proinde itidem* Homologos *dico, areæ vero quæcunque clauſæ lineis homologis ſive rectis, ſive curvis erunt in ratione duplicata laterum homologorum.*

118. Cum enim ſingulis lateribus rectis alterius figuræ, debeant reſpondere latera recta alterius, non poteſt latus curvilineum non reſpondere lateri curvilineo, quod nimirum ſi non curvilineum ſed rectilineum eſſet, illi in altera pariter rectilineum reſponderet. Porro puncta in illis homologa erunt ea, in quæ incident rectæ homologæ a quibuſvis ſingulis ſingularum homologis punctis ductæ, & iccirco chordæ, quæ jun-

gent

gent homologa ejuſmodi puncta, & ipſæ homologæ erunt & poſitione, & magnitudine, quæ iccirco ad rectas quaſcunque homologas habebunt inclinationem eandem. Si ejuſmodi chordæ ſint DE, *de*, quæ indefinite producantur in M, N; *m*, *n*, erunt ipſæ MN, *mn* poſitione homologæ, & cum homologis rectis eoſdem continebunt angulos. Coeuntibus vero punctis D, E; *d*, *e*, ſecantes MN, *mn* evadunt tangentes, quæ iccirco remanent poſitione homologæ, & cum homologis eoſdem continent angulos. Porro cum arcubus in plures, ac plures particulas ſectis in infinitum, chordæ ſemper homologæ ſint & poſitione, & magnitudine, ac earum ſummæ ad arcuum ipſorum magnitudinem accedant in infinitum, arcus ipſi erunt in ea ratione conſtanti. Si autem a quibuſvis perimetri angulis, vel ab extremis chordarum homologarum utcumque parvarum punctis, ad bina puncta homologa aſſumpta ſingula in ſingulis figuris ducantur rectæ, triangula illa omnia jungent terna puncta homologa, adeoque ſimilia erunt, & areas habebunt in ratione duplicata laterum homologorum. Quare omnes homologæ areæ figurarum ſimilium ſive rectilineæ ſint, ſive curvilineæ, ad quas areæ chordarum in infinitum accedunt, erunt in ratione duplicata laterum homologorum.

119. *Si ex quodam puncto* F *in fig.*32, 33 *ad quævis puncta* E *figuræ* AEB *ductis rectis* FE, *capiantur in iis ſemper* Fe *ad* FE *in ratione data, vel verſus* E, *ut in fig.*32, *vel ad partes oppoſitas, ut in fig.*33, *punctum* e *deſcribet* F.32 33

peri-

perimetrum figuræ aeb *directe ſimilis figuræ* AEB, *binis punctis homologis coeuntibus in* F, *quod erit utrique commune, & puncta* E, e *erunt homologa, ut & rectæ* FE, Fe; *ac in iis quavis rectæ homologæ erunt inter ſe parallelæ, quavis puncta homologa jacebunt in directum cum puncto communi F, & ſi fuerint curvæ perimetri, tangentes ductæ per puncta homologa, ſive per puncta, in quibus perimetro occurret ad eaſdem partes, vel ad oppoſitas recta ducta per* F *erunt parallelæ*.

120. Patet, cum ducta per F quavis indefinita FG, & in ea aſſumpto *g* ad eaſdem partes in fig.32, ad oppoſitas in fig.33, ſemper GFE, *g*F*e* debeat eſſe ibi idem angulus, hic æqualis ad verticem oppoſitus, & ratio FE ad F*e* ponatur conſtans. Rectæ vero quævis homologæ ad quamvis rectam per F tranſeuntem debebunt ita æque inclinari, ut parallelismum ſervent. Ex puncto F ad quodvis punctum primæ figuræ ducta recta, aſſumenda erit in ea ipſa ad eaſdem partes, vel ad oppoſitas recta ipſi homologa, quæ punctum homologum definiat, ac tangentes per puncta homologa E, *e* ductæ debebunt cum recta E*e* homologa continere angulos æquales ita, ut ſervent parallelismum.

121. *Si autem figuræ ſint directæ ſimiles, & bina puncta homologa coeant, ac congruat directio unius rectæ cum recta homologa, vel ad eaſdem partes, vel producta ad partes oppoſitas, rectæ omnes ex eo communi puncto ductæ uſque ad perimetrum ad eaſdem pariter, vel ad oppoſitas partes erunt in data ratione, & homologæ, ac ha-*

habebuntur ea omnia, quæ ſuperiore numero dicta ſunt.

122. Nam ſi punctum F ſit commune, & congruant binæ quævis rectæ homologæ FG, Fg utrovis modo, ducta quavis FE, quæ occurrat perimetro ſecundæ figuræ in *e*, erit angulus GFE idem ac *gFe* in fig. 32, æqualis ad verticem oppoſitus in fig. 33, adeoque FE, *fe* debebunt eſſe rectæ homologæ, & in illa ratione conſtanti.

123. Sed jam redeundum ad ipſas Sectiones Conicas, quarum elegantem conſtructionem per motum continuum ope filorum videbimus ſequenti Scholio.

SCHOLIUM IV.

124. EX proprietate, quam num. 93 demonſtravimus, facile eruitur methodus deſcribendi Ellipſim, & Hyperbolam motu continuo ope filorum, qua quidem paſſim utuntur fabri lignarii, & murarii pro Ellipſi. *Aſſumpto filo, cujus longitudo æquetur axi futuræ Ellipſeos, ejus extrema capita defiguntur punctis focorum* F, f *in fig.* 19 *tum ſtylo* P *filum circumducitur ita, ut ſemper extenſum maneat, & excurrat, ac Ellipſis deſcribitur*, cum nimirum binæ FP, *f* P ſimul ſemper æquentur, eidem longitudini fili. *Et vero etiam datis binis Ellipſeos axibus* Mm, Xx, *ſive longitudine & latitudine Ellipſeos quæſitæ, foci* F, f *admodum facile invenientur, duplicato nimirum filo, ac medio ejus puncto, ſive ipſo flexu ſuperpoſito* F. 19

poſito alteri vertici x *axis conjugati, diducantur bina capita, donec ad axem tranſverſum deveniant, extenſo filo, in* F, *&* f. Patet enim eos fore focos, & Ellipſim tranſituram per *x*, vel geometrice facto centro in altero vertice *x* axis conjugati intervallo CM ſemiaxis tranſverſi, invenientur in ipſo axe tranſverſo foci F, *f*; cum nimirum (num.64) debeat eſſe quadratum CF differentia quadratorum C*x*, CM, nimirum bina quadrata C*x*, CF, quæ æquantur quadrato *x*F, debeant æquari quadrato CM, adeoque ipſa *x*F ſemiaxi CM.

125. *At ſi bina fila ita jungantur, ut alterius caput tantum excurrat ultra caput alterius, quanta eſt longitudo axis tranſverſi quæſitæ Hy-*
F.20 *perbolæ, & ea capita defigantur focis* F, f, *tum ſtylo* P *ſimul evolvantur illa bina fila, ut extenſa maneant, & æquales utriuſque partes in illa divaricatione, & explicatione excurrant ex ipſo ſtylo, deſcribetur ramus Hyperbolæ circa eum focum, cui filum brevius infixum fuerat.* Semper enim differentia filorum FP, *f*P manebit eadem, quæ fuerat initio. Tum permutatis capitibus, deſcribetur etiam alter ramus. Foci autem F, *f* datis axibus invenientur in axe tranſverſo centro C intervallo M*x*, cum nimirum (num.64) quadratum CF, vel C*f* in Hyperbola æquetur ſummæ quadratorum ſemiaxium CM, C*x*, adeoque ipſa CF, vel C*f* ipſi M*x*.

126. Parabola autem hoc pacto deſcribi pote-
F.34 rit ope fili. *Sit regula* AB *in fig.34, quæ collocetur loco directricis, ac ipſi applicetur norma* HDI

vita

ita, *ut alterum ejus latus* DI *excurrat per ipſam regulam*, *alteri lateri* DH *affigatur in* H *caput alterum fili* HPF, *cujus longitudo æquetur lateri ipſi*, *alterum vero caput affigatur in* F *foco Parabolæ deſcribendæ*, *& dum norma movetur*, *detineatur ſtylo mobili* P *filum ipſum partim applicatum regulæ in* HP, *partim diſtentum in* FP. Patet fore ſemper PF æqualem PD, adeoque punctum P ad Parabolam foco F, directrice AB. Deſcripto autem arcu dimidio MP, poterit converſione normæ alter arcus M*p* deſcribi ex parte oppoſita.

SCHOLIUM V.

127. Conſtructione problematis primi determinatus eſt concurſus rectarum directrici parallelarum, & axi perpendicularium cum Sectionis Conicæ perimetro. Sequenti vero problemate determinabimus concurſum rectæ cujuſvis per focum ductæ, ac ejus quoque conſtructio harum curvarum formam proponet ob oculos.

PROPOSITIO II. PROBL.

128. *Datis directrice*, *foco*, *& ratione determinante invenire concurſum rectæ datæ tranſeuntis per focum cum Sectionis Conicæ perimetro*.

129. Sit primo recta data per focum tranſiens parallela directrici. Demiſſo in ipſam directricem in fig. 35, 36 perpendiculo FE, capiantur F. 35 36

tur in ea recta data FV, F*u* ad ipſam FE in ratione determinante; & (num.48) ejus concurſus cum perimetro Sectionis Conicæ, erunt puncta *u*, V.

130. Si autem ſit alia quævis non parallela, ea directrici occurret in aliquo puncto Q. Capiantur in ipſa directrice QG, Q*g* æquales ipſi QF, poſito puncto G ad eam plagam reſpectu Q, ad quam jacet F reſpectu V. Ductiſque GV, *g*V, earum occurſus, ſi qui erunt, cum recta data QF, productis & ipſis, & QF utravis ex parte, quantum opus fuerit, erunt quæſiti concurſus cum Sectionis Conicæ perimetro, eruntque ii ſoli.

131. Nam ducta PD perpendiculari ad directricem, ſimilia erunt triangula FPV, QPG, & QFE, QPD, adeoque erit FP ad FV, ut QP, ad QG, ſive ad QF, nimirum ut PD ad FE; adeoque alternando FP ad PD, ut FV ad FE in ratione determinante, & eadem eſt demonſtratio pro puncto *p*, ſubſtitutis *p*, *g*, *d* pro P, G, D. Contra vero ſi punctum P fuerit ad Sectionem Conicam, & ducatur per V, ac P recta occurrens directrici in G, erit FP ad PD, ut FV ad FE in ratione determinante, & PD ad PQ, ut FE ad FQ, ob FE, PD parallelas, adeoque ex æqualitate ordinata FP ad PQ, ut FV ad FQ. Eſt autem FP ad PQ, ut FV, ad GQ ob ipſarum FV, GQ paralleliſmum: Ergo erit GQ æqualis FQ. Quare punctum, quod ad Conicam Sectionem ſit, determinari omnino debet aſſumpta QG, vel Q*g* æquali QF, & ducta GV, vel *g*V; adeoque puncta inventa ea conſtructione ſunt

ſunt ad ipſam Sectionem Conicam, & ſunt ea ſola. Q. E. D.

Coroll. 1.

132. *Quævis recta per focum ducta occurrit Ellipſi in binis punctis hinc inde a foco: quævis pariter occurrit Parabolæ hinc inde a foco, præter unicam directrici perpendicularem, cujus altera interſectio a directrice remotior ita in infinitum recedit, ut nuſquam jam ſit. In Hyperbola autem quævis occurrit ſemel inter focum, & directricem; alter vero occurſus in infinitum ita recedit, ut nuſquam jam ſit in binis rectis hinc inde directrici inclinatis in angulo, quem num.* 10. *diximus angulum æqualitatis, in reliquis inclinatis in angulo minore habetur citra directricem ultra focum, in inclinatis in angulo majore ultra directricem.*

133. Nam rectæ quidem QF, GV ſe decuſſantes, neceſſario ſemper ſibi occurrent alicubi in P inter focum, & directricem: rectæ vero QF, gV vel erunt parallelæ, puncto *p* ita in infinitum abeunte, ut nuſquam jam ſit, vel convergent ad partes FV, ut in fig. 35, vel ad partes Q*g*, ut in fig. 36, prout Q*g*, ſive QF fuerit æqualis, major vel minor reſpectu FV. Porro in Ellipſi in qua FE eſt major, quam FV, ſemper FQ, quæ vel congruit cum FE, vel eſt ipſa major, erit æque major, vel multo magis major, quam ipſa FV, adeoque punctum *p* ſemper habebitur, ut in fig. 35, citra directricem ad partes oppoſitas P reſpectu F. In Parabola, in qua FE æquatur FV, ſi FQ congruat cum FE, nimirum ſit perpendicularis directrici,

erit

erit æqualis ipſi FV, & punctum p ita in infinitum recedet, ut nuſquam jam ſit. in reliquis vero poſitionibus omnibus erit FQ major, quam FE, adeoque major, quam FV, & punctum p habebitur, ut in Ellipſi. In Hyperbola vero, in qua FE eſt minor, quam FV, ſi angulus FQE fuerit ejuſmodi, ut radius ad ejus ſinum habeat rationem determinantem, quam nimirum habet FV ad FE, ipſa FQ habebit ad FE rationem eandem, adeoque æquabitur ipſi FV, & punctum p ita in infinitum recedet, ut nuſquam jam ſit. Si autem is angulus fuerit minor, erit FQ major, quam FV & habebitur caſus figuræ 35, ut in Ellipſi, & Parabola; ſi autem is angulus fuerit major, erit FQ minor, quam FV, & concurſus p abibit, ut in fig.36, ultra directricem.

Coroll. 2.

F.37 134. *Si recta* Pp *per focum* F *ducta in fig.* 37,
38 38, 39, 40, *& occurrens directrici in* Q, *Se-*
39 *ctioni Conicæ in* P, p *ſecetur bifariam in* R, *erunt*
40 RF, RP, RQ *continue proportionales in ratione, quam habet foci radius ad ordinatam directrici in eo angulo* FQE, *& ſi recta ipſi* FQ *perpendicularis ducta e foco* F *occurrat directrici in* I, *recta per* I, *&* R *ducta; erit in Parabola perpendicularis directrici, in Ellipſi, & Hyperbola per centrum tranſibit.*

135. Primum patet ex num.22. Cum enim puncta p, F, P, Q conſtituant proportionem harmonicam (num.8.), & Pp ſecetur bifariam in R, erunt RF, RP, RQ in continua ratione FP ad PQ. Secundum ſic demonſtratur.

136.Du-

136. Ducta præterea PD perpendiculari directrici, & FH eidem parallela, quæ occurrat rectæ IR productæ, ſi opus ſit, in H, erit RF ad RQ, nimirum HF ad IQ in duplicata ratione FP ad PQ, nimirum ut illius quadratum ad hujus quadratum. Eſt autem ob angulos IFQ, IEF rectos, & angulum ad I communem triangulis FIQ, EIF, recta IQ ad IF, ut IF ad IE, adeoque QI ad IE, ut quadratum QI ad quadratum FI, ſive ob ſimilia triangula rectangula QFI, QDP, ut quadratum QP ad quadratum PD; Erit igitur ex æqualitate ordinata FH ad IE ut quadratum FP ad quadratum PD, nimirum in ratione determinante duplicata.

137. Porro ea ratio in Parabola eſt ratio æqualitatis, adeoque in fig.38 æquantur FH, IE; & proinde IH parallela eſt rectæ EF, & directrici perpendicularis. At in Ellipſi in fig. 37, & in Hyperbola in fig.39, 40, eſt (num.90) CF ad CM, & CM ad CE in ratione determinante, adeoque CF ad CE in eadem ratione duplicata. Erit igitur in utraque FH ad EI, ut CF ad CE, ac proinde ductis CH, CI, triangula CFH, CEI ſimilia erunt (Coroll. 2. prop. 12. Geom.), & angulis FCH, ECI æqualibus, puncta I, H, C in directum jacent.

SCHOLIUM.

138. HÆC quidem conſtructio minus fœcunda eſt, quam conſtructio primi problematis, adhuc tamen & expedita eſt, & formam Conicarum Sectionum, ac earum diſcrimen proponit

ponit ob oculos; cum nimirum ex Coroll. 1. ſtatim pateat Ellipſim quidem redire in Orbem circa focum, Parabolam habere unicum ramum citra directricem protenſum in infinitum, Hyperbolam vero binos ejuſmodi ramos hinc inde a directrice. Secundi autem Corollarii ſummus in præcipua quadam Sectionum Conicarum proprietate demonſtranda uſus erit paullo infra.

F.35 139. Satis autem facile perſpicitur & illud,
36 rectam quoque per G, & *u* ductam debere tranſire per *p*, & rectam ductam per *g*, & V debere tranſire per *p*, adeoque vel alterum e punctis V, *u* cum utroque G, *g*, vel alterum e punctis G, *g* cum utroque V, *u* problemati ſolvendo ſatisfacere.

PROPOSITIO III. PROBL.

140. D*Atis foco, directrice, & ratione determinante, invenire concurſum rectæ datæ cujuſvis cum Sectione Conica.*

F.41 141. Si recta data ſit directrici parallela, ſolve-
42 tur problema per conſtructionem problematis 1
43 (num. 34, 36), ſi tranſeat per focum ſolvetur per
44 conſtructionem problematis 2 (num. 128). Si ſit
45 quævis alia KH, quæ quidem directrici neceſſario alicubi occurret in H, conſtruetur problema hoc pacto.

142. In figuris 41, 42, 43, 44, 45, quarum prima ad Ellipſim pertinet, ſecunda ad Parabolam, reliquæ ad Hyperbolam pro caſibus, in quibus occurrat recta data ſoli ramo citeriori, vel

vel ſoli ulteriori, vel utrique. Aſſumpto puncto L ubivis extra directricem, demiſſoque in ipſam directricem perpendiculo LG, ac in eo, ſi opus ſit, producto capta LS, quæ ſit ad ipſum in ratione determinante, centro L, radio LS deſcribatur circulus, ductaque LO parallela rectæ datæ KH, donec occurrat directrici in O, tum conjunctis punctis H, F, ducatur per O recta *z*OZ ipſi HF parallela poſito in ea puncto Z ad eandem directricis partem cum centro L, puncto vero *z* ad partem oppoſitam; & ſi ipſa OZ producta utravis ex parte indefinite alicubi occurrat circulo in T vel *t*, ducta LT vel L*t*, ac ex F recta ipſi parallela, hujus concurſus cum HK in P vel *p* determinabit punctum quæſitum, nec in aliis punctis præter hoc modo inventa recta data poteſt datæ Sectioni Conicæ occurrere.

143. Ducta enim PD, vel *pd* perpendiculari ad directricem, ob rectas LO, GL parallelas rectis PH, DP, ſimilia erunt triangula LGO, PDH; & ob rectas LO, OT, TL parallelas rectis PH, HF, FP, ſimilia LTO, PFH; quare FP ad PH, ut LT ad LO, & PH ad PD, ut LO ad LG; adeoque & ex æqualitate ordinata FP ad PD, ut LT, ſive LS ad LG, nimirum in ratione determinante, adeoque punctum P eſt ad datam Sectionem Conicam, & eadem eſt demonſtratio pro puncto *p*.

144. Contra vero ſi quoddam punctum P ſit ad Sectionem Conicam datam, & manentibus cæteris ducatur LT parallela FP, donec occurrat rectæ OZ alicubi in T, erit LT ad LO ut FP ad PH, & LO ad LG ut PH ad PD, adeoque LT ad LG ut FP ad PD

 in

in ratione determinante, in qua cum ſit LS ad LG, erit LT æqualis LS, adeoque punctum T ad circulum. Quare punctum quodvis, in quo recta HK occurrat Sectioni Conicæ, debet inveniri expoſita conſtructione per concurſum rectæ zOZ cum circulo, & ſola puncta eo pacto inventa ſunt ad Sectionem Conicam datam: Q. E. D.

SCHOLIUM.

145. Mirum ſane quam foecunda eſt hæc conſtructio, quam Tyroni exercendo apta. Plurima quidem ex ea inferri poſſunt theoremata, & pleraque utiliſſima ac iterum foecunda: curabimus autem quantum fieri poterit, ne tanta rerum copia confuſionem pariat. Interea notandum illud; poſſe punctum L aſſumi etiam ultra directricem, quamquam nos in hiſce ſchematis ipſum ſemper citra directricem aſſumpſimus. Deinde poſſe ipſum aſſumi diverſis locis, quæ multo faciliorem conſtructionem exhiberent, ſed minus generalem, & generalibus theorematis eruendis minus aptam. Potiſſimi caſus, in quibus conſtructio contrahitur, ſunt ii, in quibus aſſumatur punctum L in ipſa perimetro Sectionis Conicæ, nimirum in aliquo puncto P jam invento, quo caſu radius circuli eſſet ipſa recta PF, quæ ad perpendiculum PD rationem habet determinantem; vel aſſumatur in foco ipſo F, quo caſu radius circuli eſſet dimidium latus rectum; ſive in fig. 9, 10, 11 FV, cum nimirum ſit FV ad perpendiculum FE pariter in ratione determinante,

nante, vel pro Ellipſi, & Hyperbola in centro, quo caſu in fig.19, 20 radius circuli eſſet ſemiaxis tranſverſus CM, qui (num.90) ad perpendiculum CE habet pariter rationem determinantem, vel pro quavis Sectione Conica in ipſa recta data, quo caſu hìc punctum O congrueret cum puncto H, puncto nimirum L jacente in ipſa KH. Poterit Tyro conſtructionem hanc generalem ad hoſce caſus particulares contrahere, ac notare quo pacto mutata poſitione, vel directione rectæ datæ, poſſint erui plures ſatis diverſæ & elegantes conſtructiones, quibus omnia quæſitæ Sectionis Conicæ puncta inveniantur.

146. Et quidem ipſa conſtructione noſtra generali patet inveniri puncta omnia, ſi nimirum manente directione rectæ datæ mutetur ejus poſitio, nimirum ſi manente angulo ad H excurrat punctum H per totam directricem, vel ſi per datum punctum quodvis, ut per focum, vel in Ellipſi & Hyperbola per centrum convertatur recta. In iis omnibus poſitionibus rectæ motu parallelo delatæ, vel per datum punctum converſæ habebuntur omnia Sectionis Conicæ puncta, & earum diſcrimen facile detegetur, atque hanc ipſam ferme tenebimus viam in eruendis iis, quæ tam multa ſe ſponte offerunt.

147. Interea quod ad ipſam conſtructionem pertinet, notetur illud. *Si recta data directrici parallela ſit, puncta* H, O *ita in infinitum abeunt, ut nuſquam jam ſint; ac ſi ea recta tranſeat per focum* F, *congruentibus* HK, HF, *congruunt etiam* OZ, OL; *&* LT, L*t abeunt in has*; FP, F*p in*

illas, adeoque in utroque hoc caſu a generali hac conſtructione deſerimur. Poſſet quidem ex ipſa pro utroque caſu peculiaris conſtructio derivari; ſed utrique caſui conſultum eſt in Prop. 1, & 2. Proinde iis omiſſis, eruemus hic primo loco generalia theoremata, quæ fluunt e motu parallelo rectæ datæ eandem ſemper inclinationem retinentis ad directricem.

148. Ac primo quidem Corollario plurima ſimul conjungemus nimis inter ſe analoga, quæ proveniunt ex unico caſu Ellipſeos, in quo recta data quamcumque poſitionem habeat; & e binis Parabolæ, in quorum primo ea ſit directrici utcunque obliqua, in ſecundo perpendicularis; ac demum e ternis Hyperbolæ, in quorum primo recta data faciat cum directrice angulum minorem angulo æqualitatis, in ſecundo æqualem, in tertio majorem.

Coroll. 1.

149. *E rectis omnibus datæ rectæ parallelis binæ ſemper Ellipſim contingunt ſingulæ in ſingulis punctis, reliquæ omnes, quæ iis interjacent eam ſecant in binis ſingulæ punctis, quæ extra illas cadunt, ipſi nuſquam occurrunt. In Parabola unica contingit in unico puncto, reliquæ omnes bis ſecant, vel ipſi nuſquam occurrunt, prout jacent a tangente verſus focum, vel ad partes oppoſitas, præter caſum, quo recta data ſit directrici perpendicularis, quo caſu nulla tangit, ſecant vero omnes in ſingulis punctis ſingulæ, altera interſectione ita in infinitum abeunte, ut nuſquam jam ſit. In Hyperbola ſi recta data efficiat cum directri-*

ſtrice angulum minorem angulo æqualitatis, binæ contingunt ſingulos ramos in ſingulis punctis, reliquæ vero nuſquam occurrunt, vel eundem ramum in binis punctis ſecant, prout iis tangentibus interjacent, vel extra eas cadunt: Si recta data efficiat angulum æqualitatis, unica ex omnibus ipſi parallelis nuſquam Hyperbolæ occurrit, ſed binos ramos relinquit hinc inde, licet ad eos accedat magis, quam pro quavis data diſtantia utcunque parva, atque iccirco dicitur Aſymptotus, *reliquæ omnes ſecant in ſingulis punctis ſingulæ ramum citeriorem, vel ulteriorem, prout jacuerint hinc inde ab ipſa aſymptoto, altera earum interſectione ita in infinitum abeunte, ut nuſquam jam ſit. Si demum angulus inclinationis ſit angulo æqualitatis major, omnes rectæ ſecant bis Hyperbolam, ſingulos nimirum ramos quælibet in punctis ſingulis.*

150. Horum omnium demonſtratio ſponte F.41
fluit rite perſpectis poſitionibus omnibus circuli 42
reſpectu directricis, & rectarum LO, OZ poſitio- 43
ne reſpectu circuli. Ac primo quidem in Ellipſi, 44
in qua ratio determinans eſt ratio minoris in- 45
æqualitatis, erit LS minor, quam LG, ut in fig.41; in Parabola æqualis, coeuntibus in ea punctis G, S, ut in fig.42; in Hyperbola major, ut in fig.43, 44, 45. Quare circulus in Ellipſi ad directricem non pertinget, in Parabola eam continget in eo puncto, in quo coeunt G, S, in Hyperbola ultra eam tranſcurret, quam proinde ſecabit in binis punctis N, *n*, ad quæ ductæ LN, L*n* inclinabuntur ad ipſam directricem in angulo

æqualitatis, cum nimirum ſit radius ad ſinum anguli LNG, vel L*n*G, ut LN, vel L*n* ad LG, nimirum in ratione determinante.

151. Præterea ſi recta *z*OZ circulo occurrat in binis punctis T, *t*, patet rectam KH debere Sectioni Conicæ occurrere pariter in binis punctis, dempto caſu, quo LT, vel L*t* congruat cum directione rectæ OL, recta vero KH non tranſeat per focum F, quo nimirum caſu recta FP, vel F*p* evadit parallela rectæ KH, puncto P vel *p*, in quo deberent concurrere ad determinandum Sectionis Conicæ punctum, ita in infinitum abeunte, ut nuſquam jam ſit. Quod ſi recta *z*OZ circulo nuſquam occurrat, recta quoque KH nuſquam occurret Sectioni Conicæ. Facile autem colligitur & illud: punctum P vel *p* debere jacere citra vel ultra directricem, prout punctum T, vel *t* jacuerit ad eaſdem partes directricis cum centro L, vel ad oppoſitas, cum in figuris prorſus ſimilibus FHDP, TOGL, & ad directricem AB ſimiliter poſitis, directrix ipſa debeat vel utrumque e lateribus ſecare, vel neutrum. Demum ſi coeuntibus punctis T, *t*, recta *z*OZ evadat tangens circuli, evaneſcente arcu illo intermedio T*t*, coibunt etiam puncta P, *p* in Ellipſi, & recta KH evadet tangens.

152. Manente igitur inclinatione rectæ KH ad directricem, ſive manente angulo ad H, concipiatur ea recta motu continuo tranſlata ita, ut punctum H percurrat totam directricem, deveniendo ex parte ſiniſtra A ex diſtantia quavis indefinite magna verſus dexteram B. Habebuntur eo pacto omnes rectæ

rectæ illam directionem habentes, & licebit contemplari quando, & qua ratione in datæ Sectionis Conicæ perimetrum incurrent. In omni eo motu punctum O manebit ſemper cum maneat punctum L, & inclinatio LO ad directricem. Recta FH perficiet dimidiam converſionem circa punctum F, tendente puncto H dextrorſum; adeoque & rectæ Oz, OZ illi ſemper parallelæ dimidiam converſionem abſolvent eodem ordine; ſed ſi centrum circuli L aſſumptum fuerit citra directricem, quod ubique præſtitimus, punctum z tendet a ſiniſtra ad dexteram, punctum vero Z ipſi oppoſitum contra a dextera ad ſiniſtram. Ea mentis oculis diligenter ſiſtenda ſunt, ut liceat unico velut conſpectu caſus complecti omnes, toto ſpatio per lineas KH, OZ indefinite utrinque productas tanquam per everricula quædam velut perraſo.

153. Incipiendo ab Ellipſi in fig. 46 habebuntur 7 diverſi caſus lineæ zOZ reſpondentes totidem caſibus rectæ HK, ſive FH. In primo caſu OZ1 extra circulum cadet ex parte dextera, tum in ſecundo recta OZ2 jam ipſum continget alicubi pariter ex parte dextera in unico puncto Q, deinde recta OZ3 adhuc centrum L relinquens ad ſiniſtram circulum ipſum ſecabit in binis punctis T1, t1 tum OZ4 tranſiens per ipſum centrum ſecabit circulum in binis punctis T2, t2 deinde OZ5 relinquens jam centrum ad partem dexteram ipſum circulum pariter ſecabit in punctis T3, t3, tum OZ6 continget iterum alicubi in unico puncto *q* ex parte ſiniſtra, at demum F.46

OZ7 ex-

OZ7 extra circulum cadet pariter ex parte ſiniſtra. Eodem igitur paſſu in primo caſu recta H1K1 extra Ellipſim cadet ex parte ſiniſtra, tum in ſecundo recta H2K2 jam ipſam continget alicubi pariter ex parte ſiniſtra in unico puncto I, deinde recta H3K3 adhuc focum F relinquens ad dexteram Ellipſim ipſam ſecabit in binis punctis P1, *p*1, tum H4K4 tranſiens per ipſum focum ſecabit Ellipſim in binis punctis P2, *p*2, illis nimirum, quæ determinavimus conſtructione ſecundi problematis num.128 juxta num.132; deinde H5K5 relinquens jam focum ad partem ſiniſtram ipſam pariter ſecabit in punctis P3, *p*3; tum H6K6 continget iterum alicubi in unico puncto *i* ex parte dextera, ac demum H7K7 extra Ellipſim cadet pariter ex parte dextera. Quamobrem *e rectis omnibus datæ rectæ parallelis binæ ſemper Ellipſim contingunt ſingulæ in ſingulis punctis, reliquæ omnes, quæ iis interjacent, eam ſecant in duobus punctis, quæ extra illas cadunt, ipſi nuſquam occurrunt*: quod quidem de Ellipſi propoſueramus.

F.47 154. In Parabola ſi recta data ſit obliqua ad directricem, quem caſum exhibet fig.47 habebuntur caſus tantummodo quinque, qui nimirum eodem prorſus pacto procedent, ac numero ſuperiore in Ellipſi. Sed quoniam hic ipſa directrix OA contingit circulum in illo puncto, in quo coeunt G, & S, poſt lineam *z*4OZ4 quævis linea *z*5OZ5 utcumque exiguum cum directrice angulum continens ipſum circulum ſecabit in binis punctis T3, *t*3. Quare, utcunque punctum H5 recedat verſus B, re-

ĉta FH5 continente cum direĉtrice angulum utcunque exiguum, ſemper reĉta H5K5 Parabolam ſecabit in binis punĉtis P3, *p*3. At ſi reĉta data ſit perpendicularis direĉtrici, ut in fig.48, jam F.48 etiam LO evadente perpendiculari ad direĉtricem, ipſum O congruit cum G, S in eo punĉto, in quo direĉtrix circulum tangit, & caſus reducuntur ad tres tantum. Quævis enim *z*OZ ex illo contaĉtu duĉta circulum ſecabit in ipſo illo punĉto O, in quod proinde abibunt omnia punĉta *t*, & præterea in aliquo alio punĉto T. Nulla igitur ejuſmodi reĉta HK Parabolam continget; ſecabit autem quævis ex iis in aliquo punĉto P, quod determinabit reĉta FP parallela reĉtæ LT, & in caſu reĉtæ H2K2 tranſeuntis per focum punĉtum P2 determinabitur conſtruĉtione Problematis ſecundi, vel Problematis primi, in quo verticem axis cujuſvis Conicæ Seĉtionis invenimus num. 36 & quidem in Parabola unicum. Reĉta autem ex B parallela reĉtæ L*t* duĉta, quæ deberet alteram interſeĉtionem determinare reĉtæ H1K1 vel H3K3 cum Parabola, congruet cum ipſa FK2, quæ ipſis parallela eſt ita, ut interſeĉtio poſt receſſum in infinitum nuſquam jam ſit. Quare omnium ejuſmodi reĉtarum *unica contingit in unico punĉto, reliquæ omnes ipſam bis ſecant, vel ipſi nuſquam occurrunt prout jacent a tangente verſus focum, vel ad partes oppoſitas, præter reĉtas direĉtrici perpendiculares, ſive axi paralellas; quarum nulla tangit, ſecant vero omnes in ſingulis punĉtis ſingulæ, altera interſeĉtione ita in infinitum abeunte, ut nuſquam jam ſit*. Quod de Parabola fuerat propoſitum.

155. Pro

155. Pro Hyperbola faciat primo data recta cum directrice angulum minorem angulo æqualitatis, ut in fig. 49; & quoniam L*n*, LN inclinantur in ipſo æqualitatis angulo (num. 150), recta LO datæ rectæ parallela, adeoque continens angulum minorem ipſis LN*n*, L*n*N debebit directrici occurrere in aliquo puncto O extra circulum ſito. Quare dum recta KH ſatis diſtat a foco F ita, ut FH1 ſatis inclinetur ad directricem, recta quidem *z*1OZ1 non occurret circulo ex parte Z1, ſed tamen ipſum ſecabit bis ex parte oppoſita *z*1 in arcu ultra directricem excurrente. Eo caſu patet ex num. 151 rectas FP1, F*p*1 parallelas rectis LT1, L*t*1 debere occurrere ipſi K1H1 in binis punctis P1, *p*1 ultra directricem ſitis, nimirum debere occurrere ramo ulteriori Hyperbolæ, atque id accidet, donec *z*2OZ2 contingat illum ipſum arcum alicubi in *q*, recta H2K2 ipſum ulteriorem ramum contingente in *i* tum recta Z3O*z*3 nuſquam circulo occurret, & recta H3K3 nuſquam occurrat Hyperbolæ. Ubi autem iterum OZ4 contigerit circulum in Q citra directricem, recta K4H4 continget jam ramum citeriorem alicubi in I, ac deinceps caſus quintus, ſextus, & ſeptimus ſe habebunt prorſus ut caſus tertius, quartus & quintus in Ellipſi, ac quocumque in immenſum recedat H7 verſus B ſemper obtinebit idem caſus ſeptimus. Igitur *ſi recta data efficiat cum directrice angulum minorem angulo æqualitatis, binæ ex omnibus rectis ipſi parallelis contingunt ſingulos ramos ſingulæ in punctis ſingulis, reliquæ vero nuſ-*

F.49

nuſquam occurrunt, *vel ſecant in binis punctis eundem ramum*, *prout iis interjacent*, *vel extra eas cadant*. Quod primo loco de Hyperbola propoſuimus.

156. Quod ſi recta data faciat cum directrice angulum æqualitatis, ut in fig.50, recta LO abibit in ipſam LN, abeunte puncto O in N. Quamobrem quævis recta per O ducta ſecabit circulum in ipſo puncto O, vel N, in quod proinde abibunt omnia puncta *t*; ac præterea in alio puncto T, præter unicam Z2Oz2 perpendicularem radio LN, quæ circulum continget, ipſa quoque interſectione T2 ibi coeunte cum *t*, & cum O, ac N. Donec igitur punctum H1 fuerit ſatis remotum a foco, angulo FH1B ſatis acuto, recta Z1Oz1 ſecabit ex parte *z*1 in T1 arcum circuli jacentem ultra directricem, & recta K1H1 ramum ulteriorem in P1, abeunte autem *t* in O recta ipſi L*t* parallela ex F ducta, erit parallela ipſi H1K1, ac ejus interſectio ita in infinitum recedet, ut nuſquam jam ſit, facta Zzzz tangente circuli, ubi & FH2 evadit perpendicularis rectæ K2H2, ac proinde abeunte in O ipſo etiam puncto T2, recta ipſi LT2 parallela ducta e foco F evadet parallela ipſi K2H2, ac proinde utraque interſectio determinanda nimirum a punctis *t*, T ita in infinitum abit, ut nuſquam jam ſit; unde conſequitur rectam K2H2 nuſquam occurrere Hyperbolæ. Reliquis autem omnibus OZ3, OZ4, OZ5 ſecantibus circulum in puncto *t* coeunte cum O, & in alio puncto T3, T4, T5, citra directricem ſito, reliquæ omnes K3H3, K4H4, F.50

K5H5

K_5H_5 ſecabunt ramum citeriorem Hyperbolæ in unico puncto P_2, P_3, P_4 ſingulæ, altera interſectione, quæ nimirum in rectis K_3H_3, K_5H_5 determinanda erat per punctum t, ita in infinitum abeunte, ut nuſquam jam ſit, quod de interſectione rectæ K_4H_4, conſtat ex conſtructione probl.2. num.130. Cum vero quævis Z_1O, Z_3O utcnmquæ parum inclinata ad illam Z_2O perpendicularem radio LO circulum neceſſario ſecet in aliquo puncto T_1, T_3 hinc, vel inde a contactu O, pariter quævis K_1H_1, K_3H_3 utcunque proxima illi K_2H_2 ſecabit ramum citeriorem, vel ulteriorem in aliquo puncto P_1, P_2, ac proinde recta illa K_2H_2 indefinite producta accedet hinc ramo ulteriori, inde citeriori indefinite productis magis, quam pro data quavis diſtantia, quin ipſis umquam occurrat, quod ipſum exprimit aſymptoti nomen. Quare in Hyperbola, ſi rectæ, quæ parallelæ ſunt rectæ datæ, cum directrice *efficiant angulum æqualitatis, nulla Hyperbolam contigit, una ex iis omnibus eſt aſymptotus, quæ nimirum nuſquam ipſi occurrit, ſed binos ramos relinquit hinc inde, licet ad eos accedat magis, quam pro data quavis diſtantia utcunque parva: reliquæ omnes ſecant in ſingulis punctis ſingulæ ramum citeriorem, vel ulteriorem, prout jacuerint hinc inde ab aſymptoto ſibi parallela, altera earum interſectione ita in infinitum abeunte, ut nuſquam jam ſit*. Quod ſecundo loco de Hyperbola propoſuimus.

157. Si vero demum recta data faciat cum directrice angulum majorem angulo æqualitatis, ut

ut in fig.51, recta LO acedet magis ad perpendiculum LS, abeunte puncto O intra circulum. Quamobrem quævis recta ZO per ipſum O ducta ſecabit circulum in binis punctis, quorum alterum *t* jacebit ultra directricem, alterum T citra. Quævis igitur recta KH ſecabit pariter Hyperbolam in binis punctis, quorum alterum *p* jacebit ultra, alterum P citra directricem, quod de recta K2H2 tranſeunte per focum demonſtratum eſt ex conſtructione problematis ſecundi. Quare ſi ille inclinationis angulus ſit major angulo æqualitatis, *omnes illæ rectæ ſecant Hyperbolam in binis punctis, nimirum ſingulos ramos in ſingulis*: Quod erat poſtremo loco propoſitum de Hyperbola. F.51

Coroll.2.

158. *Recta Conicam Sectionem nec in pluribus, quam in duobus punctis ſecat, nec in pluribus, quam in unico, contingit.*

159. Patet ex Coroll. 1., ex eo nimirum, quod recta OZ circulum nec in pluribus, quam duobus punctis, ſecat, nec in pluribus, quam in unico, contingit.

SCHOLIUM II.

160. ADmirabilis ſane ac notatu digniſſima eſt aſymptotorum natura, quæ nimirum ſi perpetuo producantur, perpetuo ad lineas pariter productas ita accedunt, ut nulla ſit diſtantia utcunque parva, quam aliquando non tranſcendant; licet omnino nunquam coincidant, in quo cum convergentibus ſeriebus analogiam habent ſum-

ſummam, & plurima ſunt earum genera, de quibus agemus ſuo loco. Interea, ut evidentior evadat Tyroni res, immediate etiam hoc pacto demonſtrabitur.

F.50 161. Si recta K2H2 in fig.50 uſpiam Hyperbolæ occurreret in R, vel *r*, deberet eſſe FR ad RH2, vel F*r* ad *r*H2 in ratione æqualitatis cum linea data in angulo æqualitati ponatur inclinata ad directricem. Id autem fieri omnino non poteſt ob angulos RH2F, *r*H2F rectos. Recta igitur K2H2 quantumlibet producatur, nuſquam Hyperbolæ occurret. At ſi ſumatur quævis K1H1, vel K3H3 jacens ultra ipſam, vel citra, & ipſi utcunque proxima, illa Hyperbolæ occurret, atque occurſus facile determinatur. Si enim ea occurrat rectæ FH2 in *i*, vel I, erit angulus FH1*i*, FH3I acutus ob angulum F*i*H1, FIH3 rectum. Quare ſi fiat angulus H1FP1, H3FP2 æqualis ipſi FH1*i*, FH3I, adeoque pariter acutus, recta FP1, FP2 occurret alicubi rectæ H1*i*, H3I in P1, P2, eritque triangulum FP1H1, FP2H3 iſoſceles, ac proinde FP1, FP2 ad P1H1, P2H3 in ratione æqualitatis, & punctum P1, P2 ad Hyperbolam, quorum primum jacebit ultra directricem, ut *i*, ſecundum citra, ut I. Quæ quidem demonſtratio & ſimpliciſſima, & evidentiſſima eſt.

162. Simul autem hic etiam ſine circulo problema admodum facile ſolvitur inveniendi punctum ad Hyperbolam in recta inclinata in angulo æqualitatis, & patet ex conſtructione ipſa eam in unico puncto Hyperbolæ occurrere. Eodem pacto

pacto etiam in Parabola fig.48 rectarum KH directrici perpendicularium interſectio cum Parabola facilius invenitur facto angulo HiFPi æquali angulo FHiPi. Res eodem redit, cum ibi angulus rectus æqualem rationem requirat, & proinde angulorum æqualitatis vices gerat. F.48

163. Sequentibus hujus conſtructionis Corollariis eruemus primum proprietates quaſdam harum linearum, quæ ſolæ inter omnes ſibi parallelas Sectioni Conicæ nuſquam occurrant, reliquis omnibus eam ſecantibus ſemel, tum faciemus gradus ad eas, quarum aliæ bis ſecant, aliæ contingunt.

Coroll. 3.

164. *In Hyperbola aſymptoti ſunt binæ, ſunt perpendiculares rectis a foco ductis ad earum interſectionem cum directrice, tranſeunt per centrum, binos ramos binis ad verticem oppoſitis angulis continent, quos angulos axis tranſverſus bifariam ſecat, ac earum ſegmenta intercepta inter centrum & directricem æquantur ſingula ſemiaxi tranſverſo.*

165. Binas eſſe conſtat ex eo, quod habeantur binæ inclinationes LN, L*n* in fig. 50 hinc inde in angulo æqualitatis, ac ſingulæ habere debeant aſymptotum ſibi parallelam. Eſſe perpendiculares rectis a foco ductis ad earum interſectiones cum directrice, demonſtratum eſt num. 156. Reliqua ſic demonſtrantur. Centro C intervallo ſemiaxis tranſverſi CM in fig. 52 inveniantur in directrice puncta H, *b* ductiſque CH, C*b*, & FH, F*b*, erit CF ad CH, ut CH ad CE in ratione F.52

 de-

determinante, cum in ea ſit CF ad CM, & CM ad CE (num.90) . Quare primo quidem rectæ CH, Cb, quarum ratio ad CE eſt eadem, ac ratio radii ad ſinum anguli CHE, CbE, inclinantur directrici in angulo æqualitatis (num.10). Deinde ſimilia erunt triangula CHF, CHE (Coroll.2. Prop.12. Geom.) Quare angulus CHF erit æqualis recto CEH, adeoque CH erit aſymptotus, & eadem eſt demonſtratio pro Cb, quarum utraque præterea ex conſtructione æquatur ſemiaxi tranſverſo CM. Patet autem trianguli HCb iſoſcelis angulum HCb ab axe CM perpendiculari baſi ſecari bifariam, ut & baſim ipſam, ac cum ſingulæ aſymptoti binos ramos hinc inde relinquant, oportet rami ipſi jaceant in binis earum angulis ad verticem oppoſitis.

Coroll.4.

166. *Diſtantia foci ab interſectione aſymptoti cum directrice æquatur ſemiaxi conjugato, ac utrique æquatur ſegmentum tangentis per verticem axis ducta, & interceptum ipſo vertice, atque aſymptoto.*

167. Nam ob angulum FHC rectum, eſt quadratum FH differentia quadratorum CF, CM, cui (num.64) æquatur quadratum ſemiaxis conjugati CX, adeoque FH, CX æquantur inter ſe. Si autem recta axi perpendicularis per M ducta, quæ ibi Hyperbolam continget (num.48), occurat aſymptotis in T, t, æqualia erunt triangula rectangula CMT, CHF, quorum angulus ad C communis, & latera CM, CH æqualia, adeoque &

MT

MT æquatur FH, & CT æquatur CF, ac eadem eſt demonſtratio pro Fh, Mt, Ct.

Coroll. 5.

168. *Aſymptoti ſunt diametri ejus rectanguli, quem efficiunt rectæ utrique axi parallelæ, ductæ per alterius vertices, habentis latera ipſis axibus æqualia; ac radius ad tangentem anguli, quem utravis aſymptotus continet cum utrolibet axe, eſt ut ille axis ad alterum: & Hyperbolæ, quæ habent eoſdem cum eodem axe aſymptotorum angulos, ſunt ſimiles, & viceverſa.*

169. Si enim per alterum axis verticem. *m* ducatur recta axi tranſverſo perpendicularis, occurrens aſymptotis CT, C*t* in I, & *i*, erunt eadem demonſtratione *m*I, *mi* æquales ipſis CX, C*x*; cum & eæ, & M*t*, MT ſint iis præterea parallelæ, rectæ quoque *t*X, T*x* parallelæ erunt, & æquales (Coroll. 1. Prop. 2. Geom.) ſemiaxi tranſverſo CM, & recta IX, *ix* ſemiaxi C*m*, ac totum T*tIi* rectangulum habens latera æqualia ipſis axibus M*m*, X*x*; ubi radius ad tangentem anguli MC*t* eſt, ut CM ad M*t*, ſive ad CX, vel ut M*m* ad X*x*; ac radius ad tangentem anguli XC*t*, ut CX ad X*t*, vel ad CM, ſive ut X*x* ad M*m*. Hyperbolæ vero, quæ eandem habebunt ad eundem axem aſymptotorum, inclinationem, eandem habebunt rationem axis tranſverſi ad conjugatum, adeoque erunt ſimiles, & viceverſa.

Coroll. 6.

170. *Si altera e binis Hyperbolis habeat pro axe tranſverſo axem conjugatum alterius, & viceverſa, quas dicimus* Hyperbolas Conjugatas,

communes habebunt aſymptotos, & æqualem focorum diſtantiam a communi centro.

171. Si enim alia Hyperbola habeat pro axe tranſverſo, Xx, pro conjugato Mm, rectangulum illud ſuperioris Corollarii erit pro utraque idem; adeoque communes utrique diametri ejus rectanguli, & diſtantiæ focorum a centro, quæ in ſingulis æquari debent eidem CT, vel Ct, communes erunt.

SCHOLIUM III.

172. HÆC quidem de Hyperbolarum aſymptotis fere ſponte fluxerunt, ex quibus facile ſolvuntur plurima problemata, quibus quærantur aſymptoti dato foco, centro, & directrice, vel foco, centro, & vertice axis tranſverſi, vel binis axibus, vel quæratur directrix datis aſymptotis, & foco, vel alia hujuſmodi, quæ per ſe quiſque facile ſolvet; pendent autem a combinatione eorum, quæ in iis theorematis connectuntur inter ſe. Plures aliæ maxime notabiles aſymptotorum proprietates occurrent infra. Notanda interea mira indoles quatuor ramorum pertinentium ad binas Hyperbolas conjugatas, quorum crura in infinitum producta ad ſe invicem accedunt magis, quam pro quavis data differentia, quin uſquam concurrant. Porro ejus figuræ, quam ſimul concludunt, analogia quædam ſatis elegans cum Ellipſi ultro pariter ſe nobis offeret infra. Interea tranſibimus ad nonnullas proprietates rectarum Conicam Sectionem ſecantium, quæ ad plures tangentium proprietates nos deducent.

Ca-

Coroll. 7.

173. *Si recta directrici alicubi occurrens Sectionem Conicam in binis punctis ſecet, bini radii foci ad Sectionum puncta ducti, cum recta tranſeunte per illum occurſum, & focum continebunt angulos binc inde æquales. Si autem contingat, rectæ ductæ a foco ad contactum, & occurſum cum directrice rectum angulum continebunt.*

174. Nam in fig. 41, 42, 43, 44 in quibus puncta P, *p* jacent in eodem ramo, poſito V in recta HF producta ad partes F, in fig. vero 45 eo poſito ad partes H; anguli HFP, VF*p*, quos rectæ FP, F*p* continent cum recta VF, erunt æquales angulis LT*t*, L*t*T, quos radii LT, L*t* iis paralleli continent cum chorda T*t* parallela ipſi VFH; adeoque cum hi æquentur inter ſe ob iſoſcelifmum trianguli TL*t*, etiam illi inter ſe pariter æquales erunt. F. 41 42 43 44 45

175. Inde autem jam patet, ſi coeuntibus punctis P, *p*, ubi ad eundem ramum terminantur, recta KH evadat tangens, foci radiis FP, F*p* coeuntibus in unicum, debere ipſum hunc radium evadere perpendicularem ipſi VFH. Sed idem multo magis manifeſtum fit in fig. 46, 47, 49, ubi angulus, quem IF, vel *i*F continet cum FH ſibi reſpondente, debeat eſſe æqualis angulo, quem circuli radius LQ, vel L*q* priori parallelus continet cum QO, *q*O tangente circuli parallela poſteriori, adeoque rectus. F. 46 47 49

Coroll. 8.

176. *Binæ tangentes ductæ per extrema puncta chordæ tranſeuntis per focum* (Chordam *autem dico rectam, quæ jungit bina quævis perimetri puncta, licet in Hyperbola ea pertineat ad ramos oppoſitos) concurrunt in directrice, & ibi continent angulum in Ellipſi acutum, in Parabola rectum, in Hyperbola obtuſum, vel acutum, prout chorda jungit bina puncta ejuſdem rami, vel ramorum oppoſitorum.*

F.53 54 177. Si enim chorda Pp, in fig.53, 54 tranſeat per focum F, ducta FH ipſi perpendiculari, donec occurrat directrici in H, rectæ PH, pH erunt tangentes (num.173). Ductis autem in primo caſu in fig. 53 rectis PD, *pd* perpendicularibus directrici, erit PF in Ellipſi minor, in Parabola æqualis, in Hyperbola major, quam PD, adeoque cum PD, PF ſint ſinus angulorum PHD, PHF ad radium communem HP (num.25. Trig.), erit angulus PHF in Ellipſi minor, in Parabola æqualis, in Hyperbola major, quam PHD; ac pariter etiam *p*HF reſpectu *p*H*d*. Quare totus angulus PH*p* conſtans e binis PHF, *p*HF minor in Ellipſi, æqualis in Parabola, major in Hyperbola binis PHD, *p*H*d* ſimul ſumptis, ſive reſiduo ad duos rectos, quibus nimirum æquantur omnes anguli prodeuntes ex H verſus F ſimul ſumpti; ac proinde ipſe PH*p* recto minor in Ellipſi, æqualis in Parabola, major in Hyperbola. At in fig.54, ubi P, *p* ſunt ad ramos oppoſitos,

ob

ob angulum HFP rectum, acutus eſt totus FHp, adeoque multo magis PHp acutus eſt.

Coroll.9.

178. *Recta ex concurſu tangentium directrici perpendicularis in Parabola chordam per focum ductam ſecat bifariam, & ejus ſegmentum inter directricem, & chordam interceptum æquatur dimidiæ chordæ, ac ſecatur bifariam in ipſa Parabolæ perimetro.*

179. Nam in Parabola fig.53 ob æquales angulos PHD, PHF, & angulos PDH, HFP rectos, angulus quoque HPI æqualis erit angulo HPD, ſive ducta perpendiculari ad directricem, & proinde parallela PD, æqualis angulo PHI alterno ipſius HPD. Igitur & latera IH, IP trianguli PIH, æqualibus angulis oppoſita, æqualia erunt, ac eadem demonſtratione Ip æquatur IH, adeoque & IP. Si autem ipſa HI occurat perimetro in V, erit FV æqualis VH, adeoque angulus VFH æqualis VHF. Cum igitur in triangulo rectangulo IFH bini anguli VHF, VIF ſimul æquentur tertio IFH recto, erit & VIF æqualis VFI, & VI æqualis VF, adeoque & VH.

SCHOLIUM IV.

180. E Corollario ſeptimo admodum facile deducitur aliud Theorema, quod quidem poſſet hic in Corollariorum ſerie collocari. Verum cum contineat unam è præcipuis Sectionum Conicarum generalibus proprietatibus, & ipſam itidem admodum fœcundam, eandem ſequenti Propoſi-

poſitione enunciabimus : tum ex ea plura deducemus Corollaria, quorum pleraqne ſummum habent uſum. At primi raro admodum uſus adveniet, nec ab eo alia pendent. Cum tamen in Elementis demonſtrari ſoleat, ipſum etiam deducemus, & ita exprimemus, ut generaliter verum ſit, licet ab aliis ita exprimi ſoleat, ut in aliquo caſu ſit falſum.

PROPOSITIO IV. THEOREMA.

181. *SI è quovis puncto perimetri in Ellipſi, vel Hyperbola ducantur binæ rectæ ad binos focos, vel in Parabola altera ad unicum focum, altera axi parallela, eæ cum tangente per idem punctum ducta æquales continent angulos hinc inde.*

182. De Parabola patet ex eo, quod ob angulum HFP in fig, 53 rectum (num.173.), & baſim HP communem, ac latera PF, PD æqualia, æquatur angulus HPF angulo HPD, vel productis DP, HP in O, & Q, angulo quoque OPQ ipſi ad verticem oppoſito.

183. In Ellipſi autem, & Hyperbola fig.55, F.55 56 ſi tangens per P ducta occurrat directrici 56 AB pertinenti ad focum F in H, & directrici *ab* pertinenti ad focum *f* juxta num.87. in *b*, inclinabitur in eodem angulo ad utramque, cum eæ nimirum ſint parallelæ. Quare erit (num.2, & 87) FP ad PH, ut *f*P ad P*b*, adeoque ob angulos ad F, & *f* rectos æquales (num.173) etiam anguli FPH, *f*P*b* inter ſe, ac in Hyperbola, productis

pari-

pariter *b*P, *f*P in Q, & O, anguli FPH, OPQ æquales erunt. Q. E. D.

Coroll. 1.

184. *Duplum anguli, quem continent binæ tangentes, æquatur in Parabola angulo, quem binæ rectæ a contactibus ad focum ductæ ibi continent ſi ibi continent ita, ut cuſpis anguli ſpectet concurſum tangentium; in Ellipſi vero differentiæ, in eodem Hyperbolæ ramo ſummæ binorum angulorum, quos ejuſmodi rectæ ad binos focos ductæ in iis continent, ſi in Ellipſi bini biatus ſe mutuo ſpectent, & in Hyperbola uterque ſpectet eandem plagam; quod ſi anguli diverſas poſitiones habeant, alter ex iis ſubſtitui debet ejus complemento ad quatuor rectos.*

185. Nam in fig. 57. in Parabola ſi tangentes ſint MPH, *mp*H, ducantur PO, *po*, H*n* parallelæ axi ad eam plagam, ad quam ipſe in infinitum protenditur intra Parabolam, & recta HFN per focum F, erunt bini anguli FPH, F*p*H æquales binis in contactu MPO, *mpo*, ſive ob parallelas binis PH*n*, *p*H*n*, adeoqne ſimul toti PH*p*. Angulus autem NFP externus æquatur ſimul binis FPH, FHP, & NF*p* binis F*p*H, FH*p*, adeoque totus PF*p* toti PH*p* una cum binis FPH, F*p*H ipſi æqualibus, nimirum duplo PH*p*. F.57

186. At Ellipſi in fig. 58 ductis HFN, H*fn*, bini FPH, F*p*H æquales erunt binis *f*PM, *fpm*, ſive quatuor internis, & oppoſitis P*f*H, PH*f*, *pf*H, *p*H*f*, nimirum toti PH*p*, & toti P*fp*. Angulus autem PF*p* æqualis binis PFN, *p*FN, ſive quatuor internis FPH, FHP, F*p*H, FH*p*, vel binis F.58

illis

illis FPH, FpH cum angulo PHp, adeoque angulo PHp bis, & toti Pfp ſemel. Quare angulo Pfp dempto a PFp, remanet angulus PHp bis.

187. Demum in Hyperbola fig.59 ductis fHn,
F.59 HFN, angulus PFp conſtans binis PFN, pFN cum æquetur quatuor FPH, FHP, FpH, FHp, excedit PHp per binos FPH, FpH. Simili argumento PHp excedit Pfp per binos HPf, Hpf prioribus æquales. Igitur PFp, PHp, Pfp ſunt in continua arithmetica proportione, & binorum extremorum ſumma æquatur duplo medio.

188. Quod ſi angulus PFp ut in fig.60, 61,
F.60 62 obvertat hiatum ad partes oppoſitas N, pro
61 ipſo ſumendum erit ejus complementum ad qua-
62 tuor rectos, nimirum aggregatum binorum PFN, pFN, ac demonſtratio eodem redibit.

Coroll. 2.

189. *In Ellipſi normalis tangenti, & in Hyperbola tangens dividit bifariam angulum, quem continent bini binorum focorum radii ad contactum ducti, ac ipſa normalis, & tangens una cum binis focis axem dividunt in proportione harmonica.*

190. Primum patet: ſi enim in Ellipſi in fig.63,
F.63 & in Hyperbola in fig.64 tangens occurrat axi in
64 T, ac PI ipſi normalis in I, FP, fP in Hyperbola debent æquales angulos continere cum tangente PT, quæ ſi in Ellipſi producatur indefinite in H ad partes oppoſitas T, erunt pariter æquales anguli FPT, fPH, adeoque & FPI, fPI, eorum complementa ad rectos TPI, HPI æquales ſunt.

191 Se-

191. Secundum autem deducitur ex primo, & ex num.30, cum nimirum rectarum PT, PI altera ſecet bifariam angulum FP*f*, altera ſit huic pſi perpendicularis.

Coroll.3.

192. *Binæ diſtantiæ* FP, *f*P *focorum a contactu, binæ* FI, *f*I *in axe computatæ a normali, binæ* FT, *f*T *ibidem computatæ a tangente ſunt in eadem ratione inter ſe. Tres diſtantiæ* CI, CF, CT *centri* C *computatæ in axe a normali, a foco, a tangente ſunt in continua ratione geometrica rectarum* FI, FT, *in qua focus dividit diſtantiam* IT *normalis a tangente. Si e binis focis, & centro demittantur perpendicula* FA, CL, *f*a *in tangentem, ſunt in eadem ratione inter ſe quatuor rectarum binaria*, 1. TF, TI, 2. TC, T*f*, 3. FA, IP, 4. CL, *f*a.

193. Patent omnia ex proprietatibus proportionis harmonicæ propoſitis ante Prop. 1 a num. 18. Nimirum eandem eſſe rationem FI, I*f*, & FT, T*f*, ac FP, P*f* partim ex ipſa notione proportionis harmonicæ, partim ex num.30. Rectas CI, CF, CT, eſſe continue proportionales in ratione I*f* ad *f*T patet ex num.22 ob F*f* intervallum binorum punctorum alternorum ſectum bifariam in C. Sunt autem IF ad FT, ut I*f* ad *f*T, ex prima hujus parte. Demum ob parallelismum, rectæ FA, IP, CL, *fa* ſunt inter ſe, ut FT, IT, CT, *f*T. Has autem eſſe gometrice proportionales conſtat ex num.26

Coroll. 4.

194. *In Ellipſi, & Hyperbola ſi ex utrovis foco ducatur perpendiculum in tangentem, recta jungens hujus extremum punctum cum centro, parallela eſt rectæ jungenti contactum cum foco altero, & æqualis ſemiaxi tranſverſo, adeoque ipſi æqualis erit recta ex centro ad tangentem ducta parallela jungenti focum cum contactu ipſo; eidem vero æquale eſt etiam ſegmentum rectæ tranſeuntis per contactum, & focum utrumlibet interceptum ipſo contactu, & recta tangenti parallela ducta per centrum.*

195. Nam ſi tangens TP in fig.63, 64 occurrat in A, & O rectis CA, FO parallelis rectæ *f*P, recta vero ducta per C parallela ipſi HP rectis PF, P*f*, OF, in B, *b*, R, ob CF, C*f* æquales, erunt æquales etiam PA, AO (Coroll.5 Propoſ.12 Geom.) interceptæ iiſdem parallelis FO, CA, *f*P, ac ob eandem rationem CR, C*b* æquales erunt inter ſe, ac proinde æquales etiam FR, *fb* in triangulis RCF, *b*C*f* æqualibus. Cum vero recta FP contineat cum tangente eundem angulum, quem *f*P, adeoque eundem, quem FO huic parallela, triangulum PFO erit iſoſceles, & FO æqualis FP. Quare primo quidem in triangulis FAO, FAP ob omnia latera æqualia, anguli ad A erunt æquales, & recta FA perpendicularis tangenti. Deinde cum RF æquetur *fb*, & FO æquetur FP in fig.63, ſumma FP, P*b*, *bf*, quæ (num.92) æquatur axi tranſverſo, æqualis erit ſummæ OF, P*b*, FR, ſive

bi-

Google

binis OR, Pb, quarum ſingulæ cum æquentur inter ſe, & æquentur CA ob parallelismum, erit tam CA parallela fP, quam Pb æqualis ſemiaxi transverſo CM: imo cum & triangulum BPb ſit iſoſceles ob angulos ad B, & b æquales angulis alternis ad P, erit & PB æqualis Pb, adeoque ipſi ſemiaxi. In Hyperbola vero in fig.64 exceſſus Pf ſupra PF, erit idem, ac ſumma exceſſuum Pf ſupra bf, ſive FR, & ipſius FR ſupra PF, ſive FO, quæ nimirum æquabitur binis PB, OR æqualibus inter ſe, vel duplæ AC. Cum igitur ille exceſſus Pf ſupra PF æquetur pariter axi tranſverſo, æquabitur ejus dimidio tam CA, quam Pb, & eodem, quo in Ellipſi, argumento PB.

Coroll.5.

196. *Perpendiculum e foco in tangentem ductum incidit in Ellipſi, & Hyperbola in concurſum tangentis ipſius cum circulo habentis pro diametro axem tranſverſum, in Parabola vero in rectam axi perpendicularem in ipſo vertice.*

197. Primum conſtat ex præcedenti, cum nimirum in fig.63 64, ob rectam CA æqualem CM, circulus centro C radio CM debeat tranſire per A. Secundum patet in fig 65 ex eo, quod ſi tangens occurrat rectæ FD in A, eam ibi ſecabit bifariam, cum ſecet bifariam angulum ad P trianguli iſoſcelis FPD. Ac proinde, ſi ducatur MA, ea ob FD, FE ſectas bifariam in A, & M erit parallela directrici ED, adeoque perpendicularis axi. F.65

Co-

Coroll. 6.

198. *In ipſa Parabola id perpendiculum eſt medium geometrice proportionale inter quadrantem lateris recti principalis, & diſtantiam contactus a foco, ac mutato utcumque puncto contactus, eſt in ratione ſubduplicata diſtantiæ ipſius.*

199. Nam triangula rectangula FMA, FAP ſimilia ſunt, cum habeant unum angulum rectum æqualem, & angulus PFA æqualis PDA ob PD, PF æquales, æquatur etiam alterno AFM, ac proinde FM ad FA, ut FA ad FP. Hinc autem quadratum FA æquatur rectangulo ſub FM, quæ (num. 68.) eſt quarta pars lateris recti principalis, & FP, adeoque ob FM invariatam, utcumque mutetur P, id quadratum eſt, ut FP, nimirum ipſa FP in ratione duplicata FA, & hæc in ſubduplicata illius.

Coroll. 7.

200. *In Parabola ipſa normalis terminata ad axem eſt dupla perpendiculi e foco in tangentem demiſſi: diſtantia foci tam a normali, quam a tangente computata in ipſo axe, æqualis diſtantiæ contactus a foco; ſubtangens dupla abſciſſæ, ſubnormalis dimidia lateris recti principalis; normalis ad tangentem, ut latus rectum ad ordinatam.*

201. Nam nomine *Tangentis*, *Normalis*, *Subtangentis*, *Subnormalis*, intelligitur PQ intercepta inter contactum & axem; PI perpendicularis tangenti pariter terminata ad, axem; QR ſegmentum axis inter tangentem, & ordinatam; RI ſegmentum ejuſdem inter normalem, & ordinatam.

Porro

Porro primo PI æquatur FD ob parallelas, adeoque eſt dupla FA. Secundo erit inde, ut IP dupla FA, ita IQ dupla FQ; adeoque FQ æqualis FI, ſive PD, nimirum diſtantiæ FP. Tertio ut IP dupla FA, ita PQ dupla AQ, adeoque & ſubtangens RQ dupla MQ, adeoque dupla etiam abſciſſæ reſiduæ RM. Quarto in triangulis FED, IRP ob laterum omnium parallelismum ſimilibus, &, ob RP, ED æquales, æqualibus, erit ſubnormalis RI æqualis FE dimidio lateri recto principali. Quinto demum ob angulum ad I communem triangulis rectangulis IRP, IPQ erit normalis IP ad tangentem PQ, ut IR ad ſemiordinatam RP, adeoque ut totum latus rectum ad totam ordinatam.

SCHOLIUM.

202. PRoprietas, quam in hac propoſitione demonſtravimus eſt una è potiſſimis Sectionum Conicarum proprietatibus, quæ nimirum ipſis focis nomen dedit. Nam radii lucis in ſpeculum incidentes ita reflectuntur, ut angulum reflexionis faciant angulo incidentiæ æqualem, qui anguli, ubi ſpeculi ſuperficies eſt curva, æſtimantur penes tangentem in ipſo incidentiæ, & reflexionis puncto. Nimirum in Ellipſi in fig.66 F.66
radii omnes *f*P egreſſi e foco *f* incidentes in 67
perimetrum debent reflecti ad F, & viceverſa: 68
in Parabola in fig.67 radii omnes OP delati per rectas axi parallelas debent pariter colligi in F, & radii egreſſi ex F debent abire paralleli. In Hyper-

Hyperbola in fig.68. ſi radii OP deferentur cum directione tendente ad f debent pariter colligi in F, & ſi egrediantur ex F, debent abire tanquam ſi egreſſi eſſent ex f. Atque hoc pacto igne ſatis valido excitato in f, poteſt in magna diſtantia accendi ignis in F, ac ſpeculo Parabolico obverſo ſoli, cujus radii adveniunt ad ſenſum paralleli, excitatur iginis in ejus foco F, ibidem vero accenſa candela in ipſo F, lumen ſatis validum ad magnam diſtantiam tranſmitti poteſt per radios poſt reflexionem parallelos.

203. His perſpectis regrediemur iterum ad conſtructionem illam noſtram, & motum lineæ parallelæ, unde aliam admodum inſignem Sectionum Conicarum proprietatem eruemus, nimirum ſecundas diametros, quæ chordas omnes parallelas bifariam ſecant, ac ex hac ipſa alia theoremata tanquam ex novo quodam ramo novos ſurculos quoquoverſum prorumpentes deducemus. Sed præmittemus Lemma quoddam generale, cujus uſus etiam infra occurret, & in Geometria late patet.

L E M M A.

F.69 70 204. *SI tres rectæ* Pp, Qq, Tt *in fig.* 69, 70 *conveniant in eodem puncto* F, *& a binis puncti* H, h *unius ex iis, ut* Pp, *ducantur binæ parallelæ* HA, ha *uſque ad alteram e reliquis, ut* Tt, *& binæ itidem parallelæ* HR, hr, *vel jacentes, vel non jacentes cum iis in directum uſque ad alteram* Qq, *erit ſemper* HA ad HR

at

ut ha *ad* hr, *ac mutato utcumque puncto* H *per rectam* Pp, *manentibus rectarum* HA, HR *directionibus, manebit earum ratio conſtans. Contra vero ſi fuerint* HA, ha *parallelæ inter ſe, &* HR, hr *inter ſe, fuerit autem* HA *ad* HR, *ut* ha *ad* hr, *jacentibus punctis* H, R; h, r, *vel ad eandem plagam, ut in fig.69, vel ad oppoſitas, ut in fig.70, prout* HA, ha *jacuerint ad eaſdem, vel ad oppoſitas, rectæ* Qq, Pp, Tt *ductæ per extrema parallelarum puncta* H, h; A, a; R, r, *vel nuſquam concurrent, vel ſimul concurrent in eodem puncto* F: *& ſi manente ratione* HR *ad* HA, *earumque directione, bina puncta* H, A *excurrant per binas rectas, excurret etiam* R *per rectam, ſi illæ coeunt, convergentem ad idem punctum.*

205. Prima pars patet, quia triangula HFA, *h*F*a* ob angulos parallelarum æquales erunt ſemper ſimilia, ut & HFR, *h*F*r*. Quare erit HA ad HF, ut *ha* ad *h*F, & HF ad HR, ut *h*F ad *hr*, adeoque ex æqualitate ordinata HA ad HR, ut *ha* ad *hr*. Secunda pars directe facile demonſtrari poteſt, ſed deducitur facilius e prima. Si enim coeuntibus rectis H*h*, A*a* in F, recta per F, & *r* ducta non tranſiret per R, tranſiret per aliud punctum O rectæ HR, & eſſet HA ad HO, ut *ba* ad *br*, ſive ex hypotheſi ut HA ad HR; & proinde HO, HR æquales, pars, & totum.

PROPOSITIO V. THEOREMA.

206. *Chordas omnes parallelas inter ſe bifariam ſecat diameter, quæ in Ellipſi, & Hyperbola ſemper per centrum tranſit, in Parabola eſt directrici perpendicularis, ſive axi parallela, & data Sectione Conica, ac inclinatione ordinatarum, datur.*

207. De chordis parallelis, vel perpendicularibus directrici patet ex num.56, & 83, per quos bifariam ſecantur hæ ab axe conjugato, illæ ab axe tranſverſo. De reliquis ſic demon-
F.71 ſtratur. In fig.71, 72, 73, 74 quæ conſtructæ
72 ſunt juxta num.142, & quarum prima pertinet
73 ad Ellipſim, ſecunda ad Parabolam, tertia ad
74 chordas jungentes in Hyperbola bina ejuſdem rami puncta, quarta ad chordas jungentes in ipſa Hyperbola ramos oppoſitos, agatur LV perpendicularis ad chordam circuli Tt, quam & ſecabit bifariam: producatur LO, qua opus eſt, ut circulo ipſi occurrat in M, & m, ſecetur chorda Pp bifariam in R, ducaturque per focum F chorda $P'p'$ ipſi parallela, occurrens directrici in Q, erectaque FI ipſi perpendiculari, quæ neceſſario alicubi occurret directrici in I, ducatur IR' ipſam $p'P'$ ſecans bifariam in R', quæ (num.134) in Ellipſi, & Hyperbola tranſibit per centrum, in Parabola erit perpendicularis directrici, adeoque parallela axi.

208. Jam vero cum ſit HP ad HF, ut OL ad OΓ, & HF ad Hp, ut $O\Gamma$ ad OL, erit ex æqua-

æqualitate perturbata HP ad Hp, ut Ot ad OT, & HR ipſarum HP, Hp ſemiſumma in prioribus tribus figuris, ſemidifferentia in poſtrema, ad priorem HP, ut OV pariter ſemiſumma, vel ſemidifferentia ipſarum Ot, OT ad priorem Ot. Quare cum ratio HR ad HA componatur ex tribus HR ad HP, HP ad HF, HF ad HA, & prima ſit eadem ac OV ad Ot, ſecunda eadem ac OL ad OT, ac tertia, ob triangulorum rectangulorum HAF, OVL ſimilitudinem, eadem, ac OL ad OV, erit ipſa ratio HR ad HA eadem, ac ſolidi ſub rectis OV, OL, OL ad ſolidum ſub rectis Ot, OT, OV, nimirum ob VO communem, ut quadratum OL ad rectangulum TOt, ſive ad rectangulum MOm ipſi æquale (Prop. 13. Geom.). Ea ratio eſt conſtans, utcumque mutata poſitione chordæ Pp, dummodo ejus inclinatio ad directricem ſit ſemper eadem, manentibus nimirum ſemper punctis O, M, L, m. Inde autem deducitur ex num. 204, omnia puncta R fore ſemper in eadem recta. Cum nimirum maneat & directio rectarum HA, HR, & ratio, ac puncta H, A excurrant per rectas IH, IF, excurret etiam punctum R per rectam ex I ductam, & chordæ omnes parallelæ ab eadem diametro bifariam ſecabuntur. Ea autem diameter erit illa ipſa IR', quæ chordam per focum tranſeuntem bifariam ſecat. Atque id quidem patet ex eo, quod ea recta debet ſecare bifariam chordam quamvis utcumque proximam chordæ P'R'p' tranſeunti per focum F. Sed ſic accuratiſſime demonſtratur; nam demonſtratio illa generalis pro chordis omnibus non

 habet

habet locum pro ea, quæ per focum tranſit, licet facile ad eandem reduci poſſit.

209. Ratio HR ad HA eſt eadem, ac quadrati LO ad rectangulum MO*m* (num.208), nimirum (Coroll.2, & 5. Prop.13. Geom.) ad differentiam quadratorum OL, LM. Quare erit HR ad RA differentiam in prioribus tribus figuris, ſummam in quarta ipſarum HR, HA, ut quadratum OL ad quadratum LM, quod pariter provenit ſi in illis a quadrato OL auferatur differentia quadratorum OL, LM, & in poſtrema figura addatur, nimirum ut quadratum OL ad quadratum LT, vel ut quadratum HP ad quadratum PF, ſive ut quadratum QP' ad quadratum P'F; & invertendo RA ad RH in ratione duplicata FP' ad P'Q, in qua ipſa ratione eſt R'F ad R'Q, cum (num.134) R'F, R'P, R'Q ſint continue in ea ratione ſimplici. Recta igitur IR debet tranſire per R'(num.204). Cum vero ipſa IR' in Ellipſi, & Hyperbola tranſeat per centrum (num.134), in Parabola ſit perpendicularis directrici, patet chordas omnes parallelas habere ſuam diametrum, quæ eas omnes bifariam ſecet, & tranſeat in illis per centrum, in hac ſit perpendicularis directrici, & parallela axi, adeoque detur invento puncto I per rectam FA perpendicularem cuilibet ex hujuſmodi chordis, Q. E. D.

Coroll. 1.

210. *Quævis recta per centrum tranſiens in Ellipſi, & Hyperbola, præter ſolas Hyperbolæ aſym-*

aſymptotos, & parallela axi in Parabola, eſt diameter ſuas habens ordinatas, quas bifariam ſecat, & quarum directio datur, data Sectione Conica, & ipſa diametro, nec præter axes ulla diameter ſuis ordinatis perpendicularis eſt.

211. Rectam enim directrici parallelam, ac perpendicularem, ſive axes ipſos, in Ellipſi & Hyperbola, quæ quidem ordinatis ſuis perpendicularis ſit, eſſe ejuſmodi conſtat ex num56., & 83. Data autem quavis alia recta, quæ per centrum C tranſeat in fig.71, 73, 74, ea directrici occurret in aliquo puncto I, ex quo ducta recta ad focum IF, & per F recta QF perpendicularis ipſi IF, ipſa IC ſecabit bifariam chordas omnes P*p* parallelas ipſi QF, quæ (num.149) ſemper habebuntur in fig.71 in Ellipſi, ac in Hyperbola habebuntur ſemper, præter caſum, quo in fig.73, 74 recta FQ inclinetur ad directricem in angulo æqualitatis, quo ſolo caſu rectarum eam inclinationem habentium altera interſectio ita recedit in infinitum, ut nuſquam jam ſit. At is caſus eſt ille ipſe, in quo CI eſt alterutra ex aſymptotis, & ipſi QF parallela. Nam in fig.50 recta FH2 eſt perpendicularis aſymptoto K2H2 tranſeunti per centrum, & rectæ K4FH4 habenti inclinationem æqualitatis ad directricem, juxta num.156. In Parabola vero in fig. 72 quævis recta parallela axi tranſverſo occurrit directrici alicubi in I, unde ducta recta IF, recta FQ huic perpendicularis, non poterit eſſe perpendicularis directrici, in quo ſolo caſu rectarum ipſi parallelarum altera interſectio ita in infini-

finitum recedit, ut nuſquam jam ſit: cumque ſemper IF ſit perpendicularis ordinatæ Pp, nuſquam erit ipſi perpendicularis diameter IR.

Coroll. 2.

212. *Quævis diameter in Ellipſi occurrit perimetro in duobus punctis, in Parabola quævis in unico, in Hyperbola quævis in duobus pertinentibus ad binos ramos oppoſitos, vel in nullo, prout jacuerit in iiſdem aſymptotorum angulis, quos axis tranſverſus bifariam ſecat, vel extra, quæ puncta diametrorum vertices dico; ut in axibus: ac recta per hos ipſos vertices ducta ordinatis parallela eſt tangens. Porro cum diametri magnitudinem non definio, intelligo ſegmentum ipſius interceptum binis verticibus, ac in Hyperbola diametros jacentes in angulis aſymptotorum, in quibus jacet axis tranſverſus, dico* primarias, *quæ jacent extra, dico* ſecundarias, *& hæ quidem occurrunt binis ramis Hyperbolæ conjugatæ, ac eorum quoque vertices, dico illa occurſuum puncta, pro earum magnitudine aſſumens ſegmentum interceptum binis verticibus. In Ellipſi autem quamvis diametrum primariam dico reſpectu ſuarum ordinatarum, ac in utraque diametrum parallelam ordinatis alterius diametri, ſeu tangentibus per ejus vertices ductis, dico ejus* conjugatam.

213. Nam in primis in Ellipſi chordæ omnes (num. 149), in quocumque angulo inclinentur, habent binas tangentes parallelas, quibus clauduntur, in quam tangentem ſi deſinat chorda Pp in fig. 71, debent binæ ſemiordinatæ RP, Rp, quæ nimirum ſemper æquantur inter ſe, ſimul evan-

evaneſcere, punctis P, *p* ſimul cum puncto diametri R abeuntibus in ipſum contactum. Eodem argumento in Parabola, in qua ordinatæ quæcumque unicam tangentem ſibi parallelam habent, diameter, quæ cum ſit perpendicularis directrici, in unico puncto debet occurrere curvæ, illi occurret in illo ipſo contactu. At in Hyperbola ordinatæ omnes, quæ ad directricem inclinantur in angulo minore, quam ſit angulus æqualitatis, habent binas tangentes parallelas, contactibus pertinentibus ad ramos oppoſitos, quæ in angulo majore, nullas habent. Porro in fig.75. ſi CH ſit altera ex aſymptotis, & diameter quædam CI accedat ad perpendiculum CE magis, quam ipſa; C*i* minus, ac ipſis FI, FH, F*i* perpendiculares ſint FO, FQ, F*o*, (num.134) ſatis patet, FO inclinari ad directricem in angulo minore, quam FQ, quæ ipſi aſymptoto parallela, ob angulum FHC pariter rectum, inclinatur in angulo æqualitatis; F*o* in angulo majore, adeoque prout diameter acceſſerit magis, quam utravis ex aſymptotis CH, C*h* ad axem CEF, vel minus, nimirum prout jacuerit in eo aſymptotorum angulo HC*h*, quem axis tranſverſus ſecat, vel extra, habebit binas tangentes ſuis ordinatis parallelas, & pertinentes ad ramos oppoſitos, vel nullas (num.149), & in primo caſu per illos ipſos contactus tranſire debebit, eodem argumento, in ſecundo nuſquam occurret perimetro, cui ſi uſpiam occurreret, haberetur ibi tangens ordinatis parallela; deberet enim ejus ordinata F.75

abire in tangentem, coeuntibus nimirum binis ejus extremis punctis, quæ ſi non coirent, diameter ipſa ordinatam per idem punctum non ſecaret bifariam.

Coroll. 3.

214. *Diameter aream Conicæ Sectionis terminatam ordinata quavis, & totam in Ellipſi aream bifariam ſecat.*

215. Patet ex eo, quod ſi concipiatur ordinata a vertice diametri motu continuo, & parallelo delata, binæ ſemiordinatæ ſemper ſibi æquales, & eadem celeritate progredientes, generabunt areas ſemper æquales.

Coroll. 4.

216. *Chordæ per bina extrema binarum ordinatarum puncta ductæ, ac tangentes per bina extrema ductæ ejuſdem chordæ, ſi parallelæ non ſunt, concurrunt in diametro: diameter vero per concurſum tangentium ducta habet pro ordinata chordam jungentem binos contactus.*

217. Cum enim in Fig. 76, 77, ordinatæ AB, *ab* bifariam ſecentur a diametro in E, & *e*, erit
F. 76 *eb* ad *ea*, ut EB ad EA, adeoque binæ rectæ
77 *a*A, *b*B debent (num. 204) concurrere cum diametro E*e* in eodem ejus puncto D. Ubi autem coeuntibus ordinatis *ab*, AB, rectæ AD, BD deſinunt in tangentes A*d*, B*d*, debebit punctum *d* manere in ipſa diametro. Hinc autem & poſtremum ſponte fluit.

Coroll. 5.

218. *Ellipſis centro, & utrique foco cavitatem obvertit, Parabola foco cavitatem, Hyperbolæ*

læ ramus uterque centro convexitatem, foco vero ramus citerior cavitatem, ulterior convexitatem.

219. Nam in Ellipſi chordæ omnes, adeoque omnia arcus puncta (num. 149) jacent inter binas tangentes, inter quas & centrum jacet, quod ſitum eſt in medio inter binos contactus, & focus uterque, cum chordæ per eos ductæ debeant iiſdem tangentibus contineri; adeoque Ellipſis & centro, & utrique foco cavitatem obvertit. In Parabola focus jacet ad eas partes, ad quas chordæ jacent reſpectu tangentis, & in Hyperbola centrum inter binas tangentes, extra quas chordæ jacent cum arcubus, focus ad eam plagam verſus quam ramus citerior protenditur, ramo ulteriore vergente ad partes oppoſitas. Patent igitur, quæ propoſuimus, etiam in iis.

SCHOLIUM I.

220. QUod ad curvaturam pertinet reſpectu focorum, poterat erui etiam immediate ex num. 149; ſed libuit potius huc reſervare, ut ſimul haberentur etiam ea, quæ pertinent ad centra. Porro quo vergat curvatura reſpectu foci & centri, neceſſario demonſtrandum eſt, cum inter cætera ubi in Mechanica inquiritur in vires, quibus Sectiones Conicæ deſcribi poſſunt, inde pendeat, utrum eæ tendere debeant ad datum punctum, an ab ipſo: nimirum utrum attractivæ eſſe debeant, an vero repulſivæ. Jam vero faciemus gradum ad proprietates qua-

quaſdam Hyperbolæ relatæ ad aſymptotos, quæ ab hac diametrorum chordas bifariam ſecantium proprietate pendent, & fœcundiſſimæ iterum ſunt, ac quædam etiam, quæ Hyperbola habet Ellipſi quoque communia, ſponte progignunt.

Coroll. 6.

221. *In Hyperbola ſegmentum chordæ interceptum inter unum extremum, & unam aſymptotum, æquatur ſegmento intercepto inter alterum, & alteram, ac diameter, ubi ordinatas bifariam ſecat, ſecat etiam bifariam earum, ſi opus eſt, productarum ſegmentum interceptum aſymptotis.*

222. Sit enim ejuſmodi chorda P*p* terminata ad eundem ramum in fig. 78, ad oppoſitos in
F.78 fig.79, quæ occurrat aſymptotis in punctis H, *b*.
79 Si PH, *pb* non ſunt æquales, erit altera, ut PH, major. Abſciſſa PO æquali *pb*, ex C per O ducatur recta, quæ (num. 212) occurret alicubi eidem ramo in P', ac recta per P' parallela chordæ priori occurrat aſympotis in H', & *b'*, Hyperbolæ iterum in *p'*. Diameter quidem, quæ hujuſmodi chordas pro ordinatis habet, per centrum C tranſibit, & ipſas chordas ſecabit bifariam in R, & R' (num.206). Cum igitur æquentur & RP, R*p*, & PO, *pb*, erit & RO æqualis R*b*; adeoque (num.204) & R'P', R'*b'* æquales erunt, nimirum & R'*p'*, R'*b'* æquantur, pars, & totum. Æquales igitur ſunt ipſa PH, *pb*, & addita communi P*p*, ipſæ *p*H, P*b* æquales erunt, ac additis RP, R*p* æqualibus, erunt & RH, R*b* æquales.

Co-

Coroll. 7.

223. *Tangens Hyperbolæ aſymptotis terminata, ſecatur bifariam in ipſo contactu, ac recta ex ipſo contactu ducta parallela alteri aſymptoto uſque ad alteram, erit dimidia ſegmenti aſymptoti prioris intercepti inter centrum & tangentem, ac ſecabit bifariam ſegmentum ejuſmodi poſterioris.*

224. Si enim in fig.78 recta HP*pb* abeat in tangentem AI*a*, abeuntibus punctis P, *p* in contactum I debebit AI eſſe æqualis I*a*: quare ducta præterea ID parallela CA, donec occurrat C*a* in D, erit & DC æqualis D*a*: ac ob I*a* dimidiam *Aa*, erit & ID dimidia AC.

Coroll. 8.

225. *Si e binis punctis* P, p *quibuſvis Hyperbolæ, in fig.*80, 81 *inclinentur ad binas aſymptotos binæ rectæ* PB, PO, & pb, po *in quibuſvis binis angulis datis, rectangulum* BPO *ſub binis inclinatis ab uno puncto, erit ſemper æquale rectangulo* bpo *ſub inclinatis ab alio, quod proinde mutato puncto* P *utcumque manebit ſemper magnitudinis ejuſdem.* F.80 81

226. Nam ob parallelas erit PB ad *pb*, ut PH ad *p*H, ſive ſumptis æqualibus, ut *ph* ad P*b*, nimirum, ob parallelas, ut *po* ad PO: ac proinde rectangulum ſub extremis PB, PO æquale rectangulo ſub mediis *pb*, *po*.

Coroll. 9.

227. *Si e quovis puncto Hyperbolæ* P *ordinetur* PD *alteri aſymptoto, parallela alteri, rectangu-*

gulum ſub abſciſſa a centro CD, *& ejuſmodi ordinata erit ſemper conſtans, quod rectangulum dicitur* Potentia Hyperbolæ, *adeoque mutato utcunque puncto, erunt ordinatæ in ratione reciproca ſimplici abſciſſarum.*

228. Nam ſi PO, PB abeant in PD, PR parallelas binis aſymptotis, erit adhuc conſtans rectangulum ſub PD, PB, quæ abiens in PR evadit æqualis CD, lateri oppoſito parallelogrammi PRCD. Erit igitur conſtans etiam rectangulum ſub CD, DP, & reſpectu binorum punctorum P, *p*, erit PD ad *pd*, ut C*d* ad CD.

SCHOLIUM II.

229. HÆC conſtans Hyperbolæ potentia eſt una e præcipuis proprietatibus Hyperbolarum, & aſſumi ſolet pro determinatione naturæ ipſius Hyperbolæ relatæ ad aſymptotos, ita ut curvæ, in quibus ordinatæ ſunt in aliqua ratione multiplicata, vel ſubmultiplicata reciproca abſciſſarum, ut hic ſunt in ſimplici, appellentur Hyperbolæ altiores. Ex ea plurimæ proprietates profluunt, quarum aliquas, ut monui, eruam ſequentibus Corollariis, tum regrediar ad eas, quæ eruuntur e præcedentibus Corollariis., ex quibus etiam illa ipſa potentia ſponte profluxit.

Coroll. 10.

230. *Poſitis iiſdem, area tam parallelogrammi* CDPR, *quod continent binæ rectæ ordinatæ ab eodem puncto* P *ad binas aſymptotos cum ipſis aſympto-*

ptotis, quam trianguli CDP, *quam continet abſciſſa, ordinata aſymptoto, & ſemidiameter, ac area in fig.*78 ACa, *quam continet tangens ad aſymptotos terminata cum ipſis aſymptotis, ſunt magnitudinis ſemper conſtantis.*

231. Si enim PB ſit aſymptoto perpendicularis, adhuc erit conſtans rectangulum ſub PD, & PB, ſive ſub CR, & PB, nimirum factum ex baſi, & altitudine parallelogrammi CDPR, adeoque tam ejus area, quam area trianguli PCD ejus dimidii. Ducta autem ID in fig.78 parallela aſymptoto AC, erit ob A*a* ſectam bifariam in I (num.223), area AC*a* dupla areæ IC*a*, adeoque, ob *a*C ſectam itidem bifariam in D, quadrupla areæ CDI conſtantis. F.78

Coroll. II.

232. *Si in fig.*80 *e binis punctis* P, p *ejuſdem rami Hyperbolæ ducantur binæ ordinatæ* PD, pd *ad alteram aſymptotum, & binæ aliæ* PR, pr *ad alteram, area* DPpd *clauſa arcu, aſymptoto, & prioribus binis ordinatis, æquabitur areæ* RPpr *clauſæ eodem arcu, altera aſymptoto, & poſterioribus binis, ac earum ſingulæ erunt æquales areæ ſectoris* PCp *terminati ad centrum* C. F.80

233. Si enim PD, *pr* ſibi mutuo occurrant in *e*, area C*rpd* æquabitur (num.230) areæ CRPD. Quare dempta communi C*re*D, & addita communi P*ep*, erit area DP*pd* æqualis areæ RP*pr*. Quoniam vero & area trianguli CDP æquatur areæ trianguli C*dp*, ſi PD, C*p* ſibi invicem occurrant in I, dempta communi CID,

& ad-

& addita communi Pl*p*, erit area ſectoris PC*p* æqualis areæ DP*pd*, adeoque & RP*pr*.

Coroll. 12.

234. *Concurſus* e *ordinatæ* PD *in fig.* 82 *ad*
F.82 *alteram aſymptotum, cum ordinata* rp *ad alteram, & concurſus* E *ordinatæ* RP *cum ordinata* dp *ſit in diametro primaria* ICi *habente pro ordinata chordam* Pp, *& ſi e vertice* I *ejus diametri ducatur ordinata* IM *ad alteram aſymptotum, erunt & abſciſſæ* CD, CM, Cd, *& ordinatæ* DP, MI, dp *continue proportionales*.

235. Ductis enim C*e*, CE, erit (num.227) CD ad C*d*, ut *pd*, ſive D*e* ad DP, ſive *d*E. Quare ob angulos CD*e*, C*d*E in parallelis æquales, ſimilia erunt triangula CD*e*, C*d*E, & angulus DC*e* æqualis angulo *d*CE, ac propterea recta C*e* ſupra CE cadit: ipſa autem E*e* diameter parallelogrammi P*ep*E bifariam ſecat alteram ejus diametrum P*p* in B, ut facile colligitur. Quare cum E*e* tranſeat per centrum C, ipſa erit diameter habens pro ordinata eandem P*p*, quæ ſi occurrat perimetro in I, & ducatur IM ordinata ad aſymptotum C*d*, erit ob triangulorum ſimilitudinem CD ad CM, ut D*e*, ſive *dp* ad MI, nimirum (num.227) ut CM ad C*d*, adeoque CD, CM, C*d* in continua proportione, quibus cum ſint reciproce proportionales (num.227) PD, IM, *pd*, erunt & ipſæ in continua proportione.

Coroll. 13.

236. *Si ſumantur abſciſſæ in altera aſymptoto in continua proportione geometrica, & erigantur*

rur ordinatæ alteri aſymptoto parallelæ, areæ clauſæ binis quibuſvis proximis ordinatis, arcu, & aſymptoto erunt inter ſe æquales; ac inter ſe æquales areæ Sectorum terminatorum ad centrum a binis quibuſvis proximis ordinatarum verticibus, conſtituentibus progreſſionem geometricam abſciſſis, vel ordinatis: area computata a data quavis ordinata, vel a data quavis ſemidiametro per ordinatæ verticem ducta uſque ad ſequentes ordinatas, vel ſemidiametros creſcet in progreſſione arithmetica, & area clauſa ordinata quavis, arcu, & aſymptoto creſcet in infinitum, ſi arcus & aſymptotus in infinitum producantur.

137. Nam exiſtentibus CD, CM, C*d* in continua proportione geometrica, ut & DP, MI, *dp*, recta CI (num.234) ſecat bifariam chordam P*p* in B, & proinde triangula PCB, *p*CB habentia baſes PB, *p*B æquales, & eandem altitudinem in C habent areas æquales, a quibus ſi demantur areæ hyperbolicæ PIB, *p*IB æquales (num.214), remanebunt æquales etiam areæ ſectorum PCI, IC*p*, adeoque & areæ Hyperbolicæ PDMI, IM*dp*, quæ illis æquales ſunt (num.232) erunt inter ſe æquales. Eodem autem pacto ſumpta C*m* tertia poſt CM, C*d*, invenietur area ſectoris *p*C*i*, vel quadrilinei *dpim* æqualis prioribus, atque ita porro aſſumptis novis abſciſſis in continua proportione geometrica, ac remanentibus in eadem reciproca ordinatis, areis ſectorum incipientibus a quavis ſemadiametro CP, vel areis quadrilineis incipientibus a quavis ordinata PD accedent nova incrementa ſemper æqualia, atque areæ proinde cre-

creſcent in ratione arithmetica. Cumque numerus abſciſſarum in geometrica proportione aſſumptarum augeri poſſit in infinitum, poteſt etiam in infinitum augeri numerus incrementorum illorum æqualium, quorum proinde ſumma quamvis finitam magnitudinem excedet.

SCHOLIUM III.

238. HÆC areæ in arithmetica progreſſione creſcentis proprietas, dum abſciſſæ creſcunt in progreſſione geometrica eſt admodum inſignis, & notatu digna. Inde enim fit, ut areæ Hyperbolicæ haberi poſſint pro logarithmis numerorum, quos exprimunt abſciſſæ; quin imo ope ipſius areæ Hyperbolicæ computatæ methodo, quæ ope calculi integralis facile invenitur, logarithmi quoque computantur, & computatis ſemel logarithmis, area Hyperbolæ clauſa datis ordinatis, & abſciſſis facile invenitur. Sed hic geometricas, non arithmeticas proprietates perſequimur Sectionum Conicarum.

239. Pergam igitur ad aliam proprietatem, quæ pariter ex conſtanti illa potentia Hyperbolæ deducitur, cui alias ex aliis prorumpentes adjiciam.

Coroll. 14.

240. *Recta alteri aſymptoto parallela, occurrens binis ramis Hyperbolarum conjugatarum, ſecatur bifariam ab altera aſymptoto, ac Hyperbolarum conjugatarum potentiæ æquales ſunt.*

241. Sint

241. Sint enim in fig.83 juxta num.170 axes communes M*m*, X*x*, communes aſymptoti TB, *tb* occurrentes tangentibus per axium vertices ductis in T, *t*, B, *b*. Recta MX parallela aſymptoto TB ſecabitur ab aſymptoto C*t* bifariam in O, ut TB in C. Si autem quævis alia ipſi parallela IL occurrat C*t* in D, erit (num.227) DI ad MO, ut CO ad CD, ut DL ad OX, adeoque ob OM, OX æquales, æquabuntur & DI, DL. Inde vero & rectangula CDI, CDL, quæ ſunt binarum Hyperbolarum conjugatarum potentiæ, æqualia ſunt. F.83

Coroll.15.

242. *Tangens aſymptotis intercepta æquatur diametro conjugatæ ejus diametri, quæ per contactum tranſit, ac recta jungens in vertice binas diametros conjugatas, & alteri aſymptoto parallela ab altera ſecatur bifariam.*

243. Si enim AI*a* fig.83 ſit ejuſmodi tangens, erit (num.223) CA dupla DI, adeoque æqualis IL, cui cum & parallela ſit, erunt & AI, CL æquales, & parallelæ, adeoque & eorum dupla A*a*, L*l* æqualia. Diameter autem LC*l* cum parallela ſit tangenti AI*a*, erit (num.212) conjugata diametri IC*i*, & recta IL jungens earum diametrorum vertices, aſymptoto TB parallela, ab aſymptoto *bt* bifariam ſecatur.

Coroll.16.

244. *Diametri conjugatæ in Hyperbolis ſunt ſibi invicem conjugatæ, quatuor tangentes per earum vertices ductæ concurrunt in aſymptotis, ubi parallelogramum conſtituunt inſcriptum figuræ clauſæ quatuor Hyperbolarum ramis, cujus area*

 eſt

eſt ſemper conſtans, æqualis nimirum rectangulo ſub axibus, ac parallelogrammum ſemidiametrorum conjugatarum rectangulo ſub ſemiaxibus.

245. Ducta enim in fig. 83 *a*LQ parallela *i*CI, erit ſegmentum aſymptoti CQ æquale IL, adeoque duplum DL, ac proinde *a*LQ tangens (n. 223), & ducta *ldi*, ac ſumpta *dq* æquali *d*C, patet ob C*l*, C*i* æquales CL, CI, fore & *li* æqualem LI, adeoque æqualem tam CA, quam CQ, & proinde *dl*, *di* dimidias CA, CQ. Quare A*l*, Q*i* convergent ad idem punctum *q* ita, ut ſit C*q* dupla *dq*, & A*q*, Q*q* ſectæ bifariam in *l*, *i*, adeoque tangentes. Erit igitur & diameter I*i* parallela tangentibus ductis per vertices diametri L*l*, adeoque ejus conjugata; & A*a*Q*q* erit parallelogrammum, quatuor tangentium, cujus area conſtanter æqualis erit areæ rectanguli T*t*B*b*, cum ſint quadruplæ triangulorum AC*a*, TC*t* æqualium (num. 230), & area CI*a*L parallelogrammi ſemidiametrorum conjugatarum, vel area ACLI cui ea æquatur, æqualis areæ TMC*x*, cum ſint duplæ triangulorum ACI, TCM pariter æqualium.

Coroll. 17.

246. *Omnium diametrorum primariarum minima eſt axis tranſverſus, ſecundariarum conjugatus; quarum vertices quo magis ab axe ipſo tranſverſo, vel conjugato recedunt, eo majores ſunt, nec niſi binæ hinc inde in æqualibus angulis inclinatæ æquales: primaria autem eſt major, æqualis, vel minor reſpectu ſuæ conjugatæ, ac anguli aſymptotorum, in quibus jacet axis tranſverſus, & Hyperbola, ſunt acuti recti, vel obtuſi, prout axis*

axis tranſverſus fuerit, major, æqualis, vel minor reſpectu conjugati.

247. Nam quo magis ſemiordinata RI diſtat a vertice axis M, eo magis creſcit (num.79) & ipſa, ac creſcente abſciſſa a centro CR, creſcit & ſumma quadratorum utriuſque, adeoque creſcit ſemidiameter CI. Eo autem magis & IL recedit ab MX, adeoque L ab X, & proinde eo magis creſcit ſemidiameter ſecundaria CL, cum ea ſit primaria Hyperbolæ conjugatæ. Binæ autem CI, CN terminatæ ad puncta I, N ordinatæ ejuſdem in angulis RCI, RCN cum axe CM æqualibus ob CR latus commune, & RI, RN latera æqualia triangulorum rectangulorum CRI, CRN, æquales ſunt. Porro cum in triangulis COM, COX latus CO ſit commune, & OM, OX latera æqualia (num.240), prout ſemiaxis tranſverſus CM fuerit major, æqualis, vel minor reſpectu conjugati CX, etiam angulus COM erit major, æqualis, vel minor angulo COX, adeoque, ob MX, IL parallelas, & CDI major, æqualis, vel minor CDL, & ſemidiameter primaria CI major, æqualis, vel minor CL. Contra vero angulus aſymptotorum TC*t* æqualis alterno COX erit minor, æqualis, vel major OCB, qui æquatur MOC, adeoque is angulus TC*t* aſymptotorum, in quo jacet axis tranſverſus, & Hyperbola erit acutus, rectus, vel obtuſus.

Coroll. 18.

248. *Differentia quadratorum binarum ſemidiametrorum conjugatarum eſt ad quadruplam po-*

tentiam Hyperbolæ ipſius, ut coſinus anguli aſymptotorum ad radium, adeoque ſemper conſtans, & æqualis differentiæ quadratorum ſemiaxium.

249. Ducta enim in fig. 78 IV perpendiculari
F.78 aſymptoto C*a*, differentia quadratorum ſemidiametri CI, & tangentis I*a* quæ tangens æquatur (num. 242) ſemidiametro conjugatæ diametri I*i*, erit ſemper eadem, ac differentia quadratorum CV, V*a*, cum ob angulos ad V rectos, quadratum illius ſemidiametri æquetur quadratis CV, VI ſimul, & quadratum I*a* quadratis *a*V, VI ſimul. Porro quadratum CV excedit bina quadrata CD, DV per bina rectangula CDV, & quadratum *a*V deficit a binis quadratis D*a*, DV per bina rectangula VD*a*, ſive a binis quadratis illis ipſis CD, DV per bina illa ipſa rectangula CDV. Igitur differentia quadratorum CV, V*a* æquatur quadruplo rectangulo ſub CD, DV. Eſt autem rectangulum ſub CD, DV ad rectangulum ſub CD, DI, ſive ad potentiam Hyperbolæ in ratione DV ad DI, nimirum ut coſinus anguli VDI, ſive interni, & oppoſiti *a*CA ad radium, adeoque conſtans; & cum axes ipſi ſint diametri conjugatæ, erit æqualis differentiæ quadratorum ſemiaxium.

SCHOLIUM IV.

250. Hiſce jam ex conſtanti illa Hyperbolæ potentia deductis, redeundum ad n. 223, ex quo potentia ipſa conſtans deducta eſt, ut alium ſurculum inde ſimul cum ea prorumpentem

tem perſequamur, qui tamen minus fœcundus eſt.

Coroll. 19.

251. *Si chorda occurrat aſymptotis, rectangula ſub utravis interſectione cum aſymptoto, & binis cum perimetro Hyperbolæ, vel utravis ex his, & illis binis, æqualia erunt inter ſe, & mutata utcumque poſitione chordæ, dummodo maneat directio, erunt ſemper magnitudinis conſtantis, æqualia nimirum ſemper quadrato ſemidiametri parallelæ ipſis chordis, ac ubi chorda ad unicum ramum terminatur, quadrato etiam tangentis interceptæ contactu, & utravis aſymptoto, & ſi ipſa chorda occurrat etiam Hyperbolis conjugatis, ejuſmodi ractangula inter ſe æqualia, & conſtantia erunt octo.*

252. Cum enim ſint in fig.78, 79 æquales inter ſe (num.221) HP, *pb*; & H*p*, *b*P, æqualia erunt quatuor rectangula HP*b*, H*pb*, PH*p*, P*bp*, & manentibus directionibus PH, P*b* ad aſymptotos, rectangulum HP*b* erit ſemper magnitudinis conſtantis (num.225). Abeuntibus autem in fig.78. punctis P, *p* in contactum I, abit rectangulum PH*p* in quadratum tangentis AI, cui æqualis eſt (num.242) ſemidiameter parallela ipſi, & chordis P*p*: ac in fig.79 abeuntibus punctis H, *b* in centrum C, abit rectangulum HP*b* in quadratum ſemidiametri CI. Hinc autem ſi in fig.84 ſint *i*I, L*l* diametri conjugatæ, & ipſa chorda P*p* occurrat præterea Hyperbolæ conjugatæ in N, *n*, tum quatuor illa rectangula HP*b*, H*pb*, PH*p*, P*bp*, tum quatuor NH*n*, F.78 79 F.84

N*bn*, HN*b*, H*nb* erunt æqualia eidem quadrato ſemidiametri CL.

Coroll.20.

253. *Si in fig.84 e vertice* p *ſemidiametri primariæ in quamvis diametrum primariam* ICi *ducatur ſemiordinata* pR, *&* e *vertice* D *ſemidiametri* CD *ejus conjugatæ recta* DE *ipſi* pR *parallela, erit quadratum* CE *abſciſſæ a centro per poſteriorem, æquale rectangulo ſub* IR, Ri *abſciſſis a binis verticibus per priorem, & differentia binorum quadratorum binarum abſciſſarum a centro* CE, CR *æquabitur quadrato ſemidiametri* CI, *in quam ſemiordinata eſt demiſſa: differentia vero quadratorum ſemiordinatæ* pR, *& parallelæ* DE *quadrato ſemidiametri* CL *conjugatæ ipſius* CI, *& idem habebitur ſi ea ſemiordinata, & ejus parallela ducantur in diametrum ſecundariam, ſed ibi quadratum abſciſſæ a centro per ordinatam æquabitur rectangulo ſub abſciſſis a binis verticibus per parallelam.*

254. Nam ſi C*p*, CD ſint ſemidiametri conjugatæ, *p*D erit parallela aſymptoto AQ (numer.242), & ſecta bifariam a C*a* in V. Quare ſi R*p* occurrat aſymptotis in, H, *b*, & ducatur *b*D, quæ occurrat aſymptoto HC in H', erit (num.204) etiam HH' ſecta bifariam in C; & cum H*b* ſecetur bifariam in R (num.221) erit *b*H' parallela CR, adeoque ordinata diametri *l*CL, & ab ea ſecta bifariam in R'.

255. Jam

255. Jam vero rectangulum bDH' (quod eſt æquale (num. 251) quadrato CI) una cum quadrato R'D, ſive CE æquatur quadrato $R'b$, ſive CR, vel quadrato CI, & rectangulo IRi; adeoque dempto utrobique quadrato CI, quadratum CE æquatur rectangulo IRi. Pariter cum quadrata CE, CI ſimul æquentur quadrato CR, erit quadratum CI differentia quadratorum CR, CE; quadratorum vero ED, Rp, ſive Rb, Rp differentia eſt rectangulum bpH, ſive (num. 251) quadratum CL. Demum ut Cp, CI ſunt ſemidiametri primariæ, CD, CL ſecundariæ reſpectu Hyperbolæ PIp, illæ ſunt ſecundariæ, hæ primariæ reſpectu Hyperbolæ DL. Quare patent tam quæ de primariis, quam de ſecundariis diametris affirmaveram.

Coroll. 21.

256. *Quadratum ſemiordinatæ ad differentiam quadratorum ſuæ ſemidiametri, & abſciſſæ a centro in diametris primariis, ſummam in ſecundariis, & ad rectangulum in illis ſub binis abſciſſis a binis diametri verticibus eſt ut quadratum ſemidiametri, vel diametri conjugatæ ad quadratum illius ipſius ſuæ ſemidiametri, vel diametri.*

257. Si enim præterea diameter primaria Ii occurrat ſuæ ordinatæ in R, erit quadratum Rb, ſive quadratum Rp cum rectangulo Hpb, nimirum bina quadrata Rp, CL ad quadratum Ia, ſive CL, ut quadratum CR, ſive quadratum CI cum rectangulo IRi ad quadratum CI; ac dividendo quadratum Rp ad quadratum CL, ut differentia quadratorum CR, CI, ſive ut re-

ctangulum IR*i* ad quadratum CI; vel alternando quadratum R*p* ad differentiam quadratorum CR, CI, vel ad rectangulum IR*i*, ut quadratum CL ad quadratum CI, vel ut quadratum totius L*l* ad quadratum totius I*i*.

258. Quod ſi diameter ſecundaria *l*L occurrat in R' ſuæ ordinatæ P'*p'*, aſymptotis autem in *b*, H', erit quadratum R'*b* ad quadratum L*a*, ſive CI, ut quadratam CR' ad quadratum CL, & componendo quadratum R'*b* cum quadrato CI, ſive cum rectangulo *p'b'*P', (num.251) nimirum quadratum R'*p'* ad quadratum CI, ut ſumma quadratorum CR', CL ad quadratum CL, & alternando ut quadratum R'*p'* ad ſummam quadratorum CR', CL, ut quadratum CI ad quadratum CL, ſive ut quadratum totius I*i* ad quadratum totius L*l*.

SCHOLIUM V.

259. HIſce deductis generaliter pro quavis Hyperbolarum ſpecie, addam hic poſtremo nonnulla, quæ pertinent ad Hyperbolam æquilateram, quæ nimirum habet latus rectum æquale axi tranſverſo, adeoque & ipſos axes æquales, & juxta num.246 angulos aſymptotorum rectos. Plæraque, quæ ad ipſam Hyperbolam æquilateram pertinent, deducuntur ex iis, quæ hic pro Hyperbolis in genere demonſtravimus, adeoque hic pariter locum ſibi vindicant. Interea notandum illud: Hyperbolam æquilateram eſſe id inter Hyperbolas, quod

eſt

eſt circulus inter Ellipſes. Nam Ellipſis, cujus axes æquales ſint, jam in circulum migrat.

Coroll. 22.

260. *Hyperbola, quæ axem tranſverſum habet æqualem conjugato, habet primo latus rectum æquale axi tranſverſo, unde &* æquilatera *dicitur: Secundo quadratum diſtantiæ foci a centro duplum quadrati axis utriuslibet: Tertio angulos aſymptotorum rectos: Quarto potentiam æqualem dimidio quadrato ſemiaxis utriuslibet: Quinto quaſvis diametros conjugatas æquales: Sexto quadratum cujuſvis ſemiordinatæ cujuslibet diametri primariæ æquale rectangulo ſub binis abſciſſis a binis verticibus: Septimo quadratum cujuſvis ſemiordinatæ cujuslibet diametri ſecundariæ æquale ſummæ quadratorum ſemidiametri ipſius vel primariæ, vel ejus conjugatæ, & abſciſſæ a centro: Octavo ipſam ſemiordinatam ad axem conjugatum æqualem diſtantiæ ſui concurſus cum ipſo axe a vertice axis tranſverſi: Nono e binis diametris primariis, vel e binis ſecundariis æqualibus, habet alteram alterius conjugatam perpendicularem.*

261. Primum patet, cum ſit (num. 71) latus rectum tertium proportionale poſt binos axes. Secundum deducitur ex num. 64. cum quadratum diſtantiæ foci a centro æquetur ſummæ quadratorum binorum ſemiaxium, adeoque ubi ii æquales ſunt, duplo quadrato utriuslibet. Tertium demonſtratum eſt num. 246. Quartum patet in fig. 83. Nam F. 83
ſi an-

ſi angulus TCt fuerit in ea rectus, erit rectus & COM ac MCO ſemirectus, & OC æqualis OM, adeoque rectangulum ſub CO, & OM, quod (num.227) dicitur potentia Hyperbolæ, æquabitur quadrato utriuslibet CO, vel OM, nimirum dimidio quadrato CM, vel CX. Quintum demonſtratum eſt num.246, & eruitur etiam ex num.248: cum quadratorum differentia nulla ſit in axibus, adeoque nulla in quibuſvis diametris conjugatis. Sextum deducitur ex quinto, & ex num.256, cum nimirum quadratum ſemiordinatæ ad rectangulum ſub iis abſciſſis debeat eſſe ut quadratum ſemidiametri conjugatæ, ad quadratum ejus ſemidiametri primariæ, quæ in Hyperbola æquilatera eſt ratio æqualitatis. Septimum patet ex eodem numero, nam in diametris ſecundariis quadratum ſemiordinatæ eodem argumento erit ad ſummam quadratorum ejus ſemidiametri, & abſciſſæ a centro pariter in ratione æqualitatis. Octavum patet ex ſeptimo & tertio. Nam ex ſe-
F.84 ptimo ſi in fig.84 Ii, Ll ſint axes, erit quadratum $R'p'$ æquale quadratis CR', CI, & ex tertio angulus ICR' rectus, adeoque ſi concipiatur $R'I$, erit ejus quadratum æquale pariter quadratis CI, CR' adeoque quadrato $R'p'$, ac proinde ipſa $R'p'$ ipſi $R'I$ æqualis. Nonum facile deducitur e quinto:
F.83 nam in fig.83 ſi CN ſit æqualis CI erit & angulus NCR æqualis ICR (num.247), adeoque & NCG æqualis ICD, qui ob omnia latera triangulorum CDI, CDL æqualia, erit æqualis angulo DCL. Quare addito NCD communi, erit NCL æqualis recto GCD. Sunt autem NC, IC ſemidiametri prima-
riæ

riæ reſpectu Hyperbolæ NMI, & CL conjugatæ poſterioris, ac eædem ſunt ſecundariæ reſpectu Hyperbolæ LX, adeoque valet idem pro utroque diametrorum genere.

Coroll.23.

262. *Si e binis verticibus* V, u *in fig.85 cujuſvis diametri primariæ Hyperbolæ æquilateræ, ducantur binæ rectæ ad quodvis punctum* P *ejus perimetri, & per verticem* V *ejuſdem rami tangens* VI *occurrens ipſi* uP *in* I, *angulus* VuP *æquabitur angulo* VPR, *vel* PVI, *adeoque quadratum chordæ* VP *æquabitur rectangulo* uPI; *differentia angulorum ad baſim* Vu *trianguli* VPu *conſtanter æquabitur angulo* uVI, *quem continet tangens* VI *cum diametro* Vu. F.85

263. Ducta enim ſemiordinata PR, quæ erit parallela tangenti VI, erit (num.260) quadratum ipſius PR æquale rectangulo *u*RV, adeoque *u*R ad PR, ut PR ad RV, nimirum ob angulum ad R communem ſimilia triangula VRP, PR*u*, & angulus R*u*P æqualis angulo VPR, adeoque & alterno PVI. Quare ob angulum ad P communem etiam triangula IVP, P*u*V remanent ſimilia, & IP ad PV, ut PV ad P*u*, ac quadratum VP æquale rectangulo *u*PI. Eſt autem angulus *u*VI differentia anguli *u*VP ab angulo IVP, ſive V*u*P.

SCHO-

SCHOLIUM VI.

264. Atque hoc quidem pacto ex conſtructione problematis tertii eruimus primariam proprietatem diametrorum ordinatas ſuas ſecantium bifariam, & inde Hyperbolæ ad aſymptotos relatæ proprietates deduximus alias nihilo minus fœcundas, ac Hyperbolæ demum æquilateræ naturam, & proprietates pleraſque. In hac poſtrema habetur etiam alia quædam elegans analogia ipſius Hyperbolæ æquilateræ cum circulo, & conſtructio loci geometrici, cujus uſus nonnunquam occurrit.

265. Conſtat ex primis Geometriæ elementis
F.86 in circulo ſupra chordam quamvis Vu in fig.86 ad quodvis peripheriæ punctum P ad eandem ab ipſa chorda partem jacentis ductas binas rectas, continere angulum VPu ſemper æqualem, cujus nimirum menſura eſt arcus dimidius VHu, cui inſiſtit, ſive qui ab eadem chorda ſubtenditur ad partem oppoſitam. Quare in circulo reliquorum angulorum PVu, PuV ſumma eſt ſemper conſtans, æqualis nimirum complemento anguli VPu ad duos rectos; qui cum ſit æqualis angulo uVI, quem tangens Vi ad partem oppoſitam ducta continet cum ipſa chorda, erit ſumma illa angulorum PVu, PuV æqualis angulo uVI, quem ea chorda ad eandem partem continet cum tangente VI; dum in Hyperbola non ſumma, ſed differentia angulorum PVu, PuV æquatur angulo uVI, quem diameter uV continet pariter cum tangente VI ad eandem partem.

266. Hinc

266. Hinc ſi quæratur hujuſmodi Problema, *ſuper data baſi conſtituere triangulum ita, ut ſumma, vel differentia angulorum ad baſim æquetur angulo dato*; utrumque Problema erit indeterminatum, infinitas nimirum ſolutiones admittens, quas omnes idem continuus locus geometricus complectetur, qui pro ſumma erit arcus circuli, pro differentia crus infinitum Hyperbolæ. Pro utroque autem conſtructio eſt hujuſmodi. *Ad punctum* V *extremum datæ baſis fiat angulus* uVI *æqualis datæ ſummæ, vel differentiæ. Tum pro ſumma in fig.* 86 *conſtruatur arcus circuli* VPu *habens* VI *pro tangente*, Vu *pro chorda, & pro differentia arcus Hyperbolæ æquilateræ* VP *indefinite productus habens pariter* VI *pro tangente, &* Vu *pro diametro primaria, & ad quodvis punctum* P *eorum arcuum ductis rectis* VP, Pu *habebitur ſolutio problematis*. F.85 86

267. Porro circulus cum iis conditionibus admodum facile deſcribitur. Ducatur VC perpendicularis ad VI, ac ſecta bifariam V*u* in O, erigatur OC perpendicularis ad V*u*, donec occurrat in C priori perpendiculo, ac centro C intervallo CV, vel C*u*, quas patet fore æquales, fiat circulus, quem patet debere tranſire per V, *u*, & habere pro tangente VI perpendicularem ejus radio. Ac eadem conſtructio eſſet, ſi quæreretur, quod eodem recidit, punctum P ita, ut angulus VP*u* eſſet æqualis dato. Tum nimirum faciendus eſſet angulus *u*V*i* ad partes oppoſitas P æqualis dato, & peracta reliqua conſtructione haberetur, quod quærebatur; ac eodem pariter redit

redit Problema, quo ſuper data chorda V*u* quæratur ſegmentum circuli capiens angulum VP*u* æqualem dato.

268. Hyperbola vero æquilatera facile pariter determinatur data diametro primaria V*u*, & tangente VI. Secta enim diametro ipſa V*u* bifariam in C, & acta per C recta parallela tangenti, in qua capiantur CB, C*b* æquales ſemidiametris CV, C*u*, erit B*b* diameter conjugata æqualis primariæ V*u*, ac datis binis diametris conjugatis datur Hyperbola.

269. Nam in primis ex num.221 eruitur expeditiſſima methodus deſcribendi Hyperbolam per puncta dato puncto P & aſymptotis concurren-
F.87 tibus in C in fig.87. Circumducta circa P regula, quæ ipſis aſymptotis occurrat in H, *b*, ſumatur ſemper *bp* æqualis HP directione contraria eritque *p* ad Hyperbolam, cujus uterque ramus facile deſcribitur. Datis autem binis diametris conjugatis I*i*, L*l* in fig.84 facile inveniun-
F.84 tur aſymptoti (num.244) ducendo per I, *i*, *l*, L rectas ipſis parallelas ac per puncta, A, Q, *a*, *q*, in quibus concurrunt, aſymptotos, quibus datis, & dato puncto I jam dantur omnia puncta per expoſitam conſtructionem.

SCHOLIUM VII.

270. EX eadem proprietate Hyperbolæ, ex qua ejuſmodi conſtructio derivatur, & illud oſtendi poteſt, admodum facile per concurſum Hyperbolæ datæ cum dato circulo inveniri binas me-

medias continue proportionales inter binas rectas datas, cujus Problematis caſus particularis eſt etiam celebris illa cubi duplicatio ab Apolline olim præſcripta, qnod Problema iccirco Veteres uſque adeo torſit, & tandiu fruſtra per planam Gœmetriam, ſive per rectarum interſectiones inter ſe, vel cum circulo eſt quæſitum,

271. *Capiantur in lateribus anguli recti* HCh *in fig.*88. *binæ rectæ* CR, Cr *æquales datis, &* F.88 *completo rectangulo* RPrC *ducatur* CP, *qua aſſumpta pro diametro deſcribatur circulus, qui ob angulos ad* R, r *rectos tranſibit per ipſa puncta* R, r: *per punctum autem* P, *aſymptotis* HC, Ch *deſcribatur Hyperbola, quæ ubi circulo occurret iterum in* p *ſolvet problema; ducta enim* pi *perpendiculari* Ch, *erunt* ip, Ci *mediæ continue proportionales inter* Cr, CR.

272. Ducta enim per P, *p* recta, quæ aſymptotis occurrat in H, *h*, erit ex natura Hyperbolæ HP æqualis *ph*, & H*p* æqualis P*h* adeoque & C*r* æqualis *ih*. Ex natura vero circuli recta C*p* erit perpendicularis P*p*, ac triangula rectangula C*ip*, *pih* ſimilia toti C*ph*, adeoque & inter ſe. Erit igitur C*r* ad C*i*, ut HP ad H*p*, ſive ſumptis æqualibus, ut *hp* ad *h*P, ſive ut *ip* ad *r*P. Erit autem & *hi* ad *ip*, ut *ip* ad C*i*; quamobrem & C*r* ad *ip* erit, ut *ip* ad C*i*, adeoque eadem erit ratio C*r* ad *ip*, *ip* ad C*i*, C*i* ad *r*P, vel CR, & C*r*, *ip*, C*i*, CR continue proportionales.

273 Verum etiam ſine totius Hyperbolæ conſtructione ſatis erit deſcripto circulo unicum ejus pun-

punctum p determinare, circumducendo regulam circa P donec deprehendatur PH æqualis pb; quin imo etiam ſine circulo ſecta PC bifariam in O ſatis erit regulam circumducere, donec deprehendatur OH æqualis Ob; ductis enim OB, Cp perpendicularibus ad Hb ob triangulum HOb iſoſcelium erit HB æqualis Bb, & ob PO, OC æquales, erit PB æqualis Bp, adeoque & PH æqualis pb. Sed determinatam problematis ſolutionem dat binorum locorum geometricorum circuli, & Hyperbolæ concurſus, ubi ſe continui eorum arcus interſecant.

274. Circuli pariter & Hyperbolæ interſectio exhibet etiam admodum expeditam methodum triſectionis anguli, quod Problema pariter diu a Geomètris per planam Geometriam nequicquam quæſitum, quam nimirum tranſcendit prorſus; ac ex ipſa conſtructione patebit, fieri omnino non poſſe, ut per circulum, & rectam lineam ſolvatur unquam. Satis autem conſtat, angulum quemvis ſecari in partes æquales tres, ſi ſecetur in tres partes æquales arcus circuli habentis centrum in anguli vertice, & interceptus inter anguli ipſius crura, ſeu latera.

275. *Sit igitur arcus circuli* FBm *fig.*89 *ſecan-*
F.89 *dus in partes æquales tres. Chorda* mF *ſecetur bifariam in* E. *Agatur per* E *recta* AB *ipſi perpendicularis, quæ tranſibit per centrum* C. *Foco* F, *directrice* AB, *ratione determinante* 2 *ad* 1 *ſit Hyperbola, quæ arcui circuli occurrat in* P, *eritque* FP *pars tertia arcus* FBm *ita, ut ducta* PO, *quæ ipſi directrici occurrat in* D *arcus in*

binis

binis punctis P, O *ſectus ſit in tres partes æquales*.

276. Demonſtratio eſt admodum facilis. Quoniam chorda PO eſt diametro AB perpendicularis, ab ea ſecatur bifariam. Eſt autem FP ad PD in ratione determinante 2 ad 1. Quare FP eſt dupla PD, adeoque æqualis PO, & proinde arcus FP, PO æquales. Ob chordas autem F*m*, PO parallelas, etiam FP eſt æqualis *m*O. Quare tres partes FP, PO, O*m* ſunt inter ſe æquales, ut oportebat. Quoniam autem eſt & F*m* ad *m*E, ut 2 ad 1, patet *m* fore alterum axis tranſverſi verticem. Quod ſi alter vertex ſit M, erit FM dupla ME, & aſſumpta *m*V verſus M æquali FM, erit & *m*V dupla VE, adeoque VE, ME æquales, & FM æqualis MV, ſive FM, MV, V*m* æquales: nimirum diviſa F*m* in M, & V in partes tres, erunt, M, *m* vertices axis tranſverſi, V centrum Hyperbolæ.

277. Porro idem ramus Hyperbolæ ſecabit circulum etiam alicubi in *p*, ac ramus oppoſitus alicubi in P', & erit F*p* dupla *pd*, æqualis *po*, ac tres chordæ, & arcus F*p*, *po*, *om* æquales, ac pariter FP' dupla P'D' æqualis P'O', quæ etiam ob P'O', *m*F parallellas erit æqualis O'*m*. Quare tres chordæ, & arcus FP', P'O', O'*m* æquales. Nimirum ſicut FP erit pars tertia arcus FB*m*, ita FBP, erit pars tertia arcus FBP*m*AF*m*, ſive ipſius F*m* integro circulo aucti, & FB*m*A*p* erit pars tertia arcus FB*m*AFB*m*AFB*m*, ſive arcus F*m* aucti binis circulis, & e contrario arcus F*p* erit tertia pars arcus FA*m*; FAP' erit tertia pars

 FA*m*BFA*m*

FA*m*BFA*m* ejuſdem FA*m* circulo aucti, FA*m*BP pars tertia FA*m*BFA*m*BFA*m* ejuſdem aucti binis circulis, & cum FP ſit tertia pars arcus FB*m*, & F*p* tertia arcus FA*m*, erit PF*p* tertia totius circuli; cumque FP ſit tertia FB*m*, & FBP' tertia FB*m*AFB*m*, ſive ipſius FB*m* circulo aucti, erit PP' pars itidem tertia circuli totius, & puncta *p*, P, P' totum circulum divident in partes æquales tres.

278. Id autem ſemper continget in quavis ſolutione geometrica, qua quæratur pars tertia arcus cujuſpiam. Semper omnino inveniri debebunt puncta tria, quæ totum circulum dividant in partes æquales tres, nec eorum punctorum inveniri umquam poterit unum, ſine reliquis binis. Ratio ejus eſt ipſa circuli natura in ſe ipſum redeuntis in infinitum, infinito quodam quarumdam veluti ſpirarum numero, quarum nulla prima, nulla ultima. Semper autem ipſe circulus ita ſibi ſimilis erit, ut quaſcumque proprietates habuerit quivis ejus arcus binis punctis interceptus generales, & pendentes unice ab eo, quod ſingula ejus puncta æque diſtent a centro eodem, eaſdem habere debeat tam arcus, qui ab altero ex iis punctis incipiens deſinat in alterum in eadem ſpira, quam qui deſinat poſt unam integram converſionem peractam, tam qui poſt duas, tam qui poſt earum numerum quemcumque, idque tam progrediendo ab eo puncto verſus unam plagam, quam tendendo verſus oppoſitam. Quare ubi quæritur pars tertia arcus incipientis ab F, & deſinentis in *m*, fieri omnino non poteſt, ut

ut aliqua geometrica conſtructione determinetur pars tertia arcus FBm, non vero ſimul & arcus FBmAFBm, & ita porro quocumque numero integrarum converſionum aſſumpto. Quin imò eadem ſimul conſtructione invenienda erit pars tertia omnium omnino arcuum, qui pergendo ab F verſus A deſinunt in m, ſive in eadem aſſumatur ſpira punctum m, ſive in quavis quotcumque integris converſionibus diſiuncta.

279. Quamobrem licet eo problemate videatur requiri unica pars tertia unici arcus, revera requiruntur innumeræ innumerorum arcuum, quod prima fronte videretur factu impoſſibile, non ſolum per circulum, & rectam lineam, ſed per curvas in immenſum magis compoſitas. Sed illud perquam commode accidit, ut omnium illorum numero infinitorum arcuum triſectiones habeantur in illis ipſis tribus punctis P, P', p, a ſe invicem diſtantibus per tertiam circuli partem. Si enim FP ſit tertia pars arcus FBm; addendo huic integrum circulum, addenda erit parti tertiæ priori pars circuli tertia POP', & habebebitur pro parte tertia totius FBmAFm arcus FPP': addito toti arcui triſecando alio integro circulo: addenda erit parti tertiæ iterum pars tertia circuli P'p, & jam pars tertia arcus triſecandi erit FPP'p: addendo vero iterum alium circulum, addenda erit parti tertiæ iterum pars tertia circuli totius pP, eritque pars tertia arcus triſecandi FBmAFP, & ita porro novis advenientibus circulis arcui triſecando, novi ſemper accedent parti tertiæ trientes circuli, & triſectio-

 num

num puncta ſemper diſcurrent per P, P', p in infinitum. Exiſtente autem pariter Fp parte tertia arcus FAm, ac novis integris adjectis circulis triſectiones diſcurrent per p, P', P in infinitum. Quamobrem tria requiruntur ad hoc Problema circuli puncta, & cum recta, vel circulus circulum nonniſi in duobus punctis ſecare poſſint, id Problema ſolvere omnino non poterunt: poterit Hyperbola, quæ poteſt in tribus punctis circulo occurrere; immo poſſet etiam ſi quatuor puncta requirerentur, ac in applicatione Algebræ ad Geometriam oſtendemus binas quaſvis Sectiones Conicas problemati ſolvendo ſufficere, vel quamvis cum circulo. Sed hiſce omiſſis regrediendum eſt jam ad illam noſtram generalem Problematis conſtructionem.

SCHOLIUM VIII.

280. UT ex generali conſtructione Propoſitio-
F.90 nis tertiæ novos & ſatis uberes capiamus
91 fructus, punctum illud L, quod ibi aſſumpſeramus
92 ubicumque, aſſumamus jam in fig. 90, 91, 92 in ipſa recta data KH, cujus concurſus quæritur cum Conica Sectione. Patet punctum O fig. 41 debere hic abire in H, cum ibi recta LO ducta ſit parallela ipſi KH, adeoque & illius rectam OZ, quæ ibidem erat parallela rectæ HF, abire in ipſam HF hujus. Quare jam conſtructio evadet multo ſimplicior. Sumpto radio LM, qui ad perpendiculum demiſſum ex L in directricem ſit in ratione determinante, & deſcripto circulo, ſi is alicubi occurrat rectæ FH, in T, t, rectæ FP, Fp paralle-

lelæ ipſis LT, L*t* determinabunt puncta P, *p* ad Conicam Sectionem, ac ſi punctis T, *t* coeuntibus recta HF contigerit circulum, etiam puncta P, *p* coibunt, & recta HL Sectionem Conicam continget. Quod ſi præterea punctum L abeat in aliquod perimetri punctum P, ut in fig.93, patet etiam PF fig.90, 91, 92 debere abire in LT ſibi parallelam, circulo tranſeunte per focum, ubi coibunt bina puncta F, T. At ſi L fuerit extra Ellipſim, vel Parabolam, vel inter binos Hyperbolæ ramos oppoſitos, focus F jacebit extra circulum, ſi vero L aſſumatur intra Ellipſim, vel Parabolam, vel utrumvis Hyperbolæ ramum, focus cadet intra circulum, quod ſic etiam accuratiſſime demonſtrari poteſt. F.93

281. Sit in fig. 94, 95, 96 P in perimetro Sectionis Conicæ citra directricem, & ducta PH perpendiculari ad directricem ipſam, ac producta tantundem ad partes oppoſitas ita, ut PQ æquetur PH, per H, P, Q ducantur ex F rectæ indefinitæ ad partes H, P, Q, & vel neutra rectarum FP, FQ incidet in directricem, ut in fig.94, vel incidet FP in I, ut in fig.95, vel etiam FQ in *b*, ut in fig. 96. Aſſumpto in FP quovis puncto L, agatur recta AL*a* parallela HQ occurrens directrici in S, rectis FH, FQ in A, *a*, ac ipſis parallela in fig.96 ſit *bpq* occurrens rectis FH, FP in *q*, *p*, & patet fore ſemper FL ad LA, vel L*a*, ut FP ad PH, vel PQ ipſi æqualem, nimirum in ratione determinante, ac in eadem ratione fore F*p* ad *pb* in fig. 96 coeuntibus ibi punctis *a*, S cum *b*, ubi L congruat cum *p*. F.94 95 96

 282. In-

282. Inde vero patet, ſolum in fig.96 punctum p fore iterum ad Sectionem Conicam exiſtente Fp ad pb in ratione determinante, cum nimirum in nullo puncto L haberi poſſit FL ad LS in ea ratione, niſi id vel congruat cum P congruentibus A, S cum H, vel abeat in p congruentibus a, S cum b. Erit igitur punctum L extra Ellipſim, Parabolam, & utrumque Hyperbolæ ramum, ſi aſſumatur in fig.94, 95 ubicumque ultra P, & in fig.96 inter P, p, erit autem intra illas, vel intra alterum hujus ramum, ſi aſſumatur citra P inter ipſum & F, vel in fig.96 ultra p.

283. Porro cum radius circuli aſſumi debeat ad LS in ratione determinante, in qua ſemper eſt LF ad LA, vel La, patet, ipſum fore majorem, æqualem, vel minorem reſpectu LF, prout LS fuerit major, æqualis, vel minor reſpectu LA, vel La. Patet autem aſſumpto L1 ubicumque inter F, & P, fore L1S1 majorem, quam L1A1, aſſumpto L in P, ſore LS æqualem LA, & eodem aſſumpto in fig.96 in p fore LS æqualem La; aſſumpto autem L2 ubicumque ultra P in fig. 94, & inter P ac I in reliquis, fore L2S2 minorem quam L2A2, ſi L aſſumeretur in ipſa directrice in I evaneſcente LS, evaneſcit & circulus, ac in punctum abit, at aſſumpto L3 ubicumque ultra I in fig. 95, & inter I, ac p in fig. 96, fore L3S3 minorem, quam L3a3, ac demum aſſumpto L4 ubicumque ultra p in fig. 96, fore iterum L4S4 majorem quam L4a4. Quare radius circuli erit major, æqualis, vel minor, quam diſtantia LF a fo-

foco, prout punctum L aſſumptum fuerit intra Ellipſim, Parabolam, utrumlibet Hyperbolæ ramum, vel in perimetro, vel extra: Q.E.D.

284. Inde autem facile eruitur primo illud. *Si aſſumatur punctum intra Ellipſim, Parabolam, vel utramlibet ramum Hyperbolæ, nullam rectam inde poſſe duci, quæ Sectionem Conicam contingat, & quamvis rectam per ipſum ductam debere ipſam ſecare bis, præter rectas parallelas axi in Parabola, vel utrilibet aſymptoto in Hyperbola, quarum altera interſectio ita in infinitum recedit, ut nuſquam jam ſit.*

285. Nam in hoc caſu punctum F, ut in fig.91, cadet intra circulum, nec ulla ex eo duci poterit recta FH, quæ circulum tangat, quævis ex iis, quæ per ipſum ducatur, circulo occurret bis in punctis T, *t* adeoque & HL Sectioni Conicæ occurret in binis punctis P, *p*, niſi forte alterum ex iis ita in infinitum recedat, ut nuſquam jam ſit, quod in iis caſibus poſſe fieri patet ex num.149. F.91.

286. *Quod ſi punctum aſſumatur in perimetro Sectionis Conicæ, unica e rectis omnibus per ipſum tranſeuntibus, continget ibidem ipſam Sectionem Conicam, reliquæ omnes ipſi occurrent iterum, præter rectas parallelas axi Parabolæ, vel Hyperbolæ aſymptotis.*

287. Nam in eo caſu focus F jacebit, ut in fig.93 in circuli peripheria, adeoque unica e rectis per ipſum tranſeuntibus, ut FH3 ipſum circulum continget, reliquis ſecantibus iterum: unde conſequitnr unicam P3H3 e rectis tranſeunti- F.93.

bus per P debere Sectionem Conicam contingere ibidem in P, reliquis extra expoſitos caſus occurrentibus ipſi iterum.

288. *Si vero punctum aſſumatur extra Ellipſim, Parabolam, vel utrumque Hyperbolæ ramum, binæ e rectis per ipſum tranſeuntibus Sectionem Conicam contingent, reliquarum omnium eæ, quæ jacebunt in iis tangentium angulis, in quibus focus jacet, occurrent bis, altero tamen occurſu in rectis axi Parabolæ, vel utrilibet aſymptoto Hyperbolæ parallelis abeunte in infinitum ita, ut nuſquam jam ſit, utroque autem occurſu in Hyperbola pertinente ad eundem ramum, vel ad oppoſitos, prout recta inclinabitur ad directricem in angulo minore quam aſymptoti, vel majore; bini vero contactus jacebunt in eodem Hyperbolæ ramo, vel in oppoſitis, prout punctum ipſum jacuerit in iis aſymptotorum angulis, in quibus foci jacent, vel extra; & in priore caſu terminabuntur ad eum ramum, qui jacet in eodem aſymptotorum angulo cum puncto aſſumpto. Sed cadente puncto in alteram aſymptotum, alter contactus in infinitum recedet, eo cadente in centrum, recedet uterque, nec uſquam jam erit.*

289. Nam in eo caſu focus F jacebit, ut in fig. 97, 98, 99 extra circulum, adeoque binæ ad ipſum ex F tangentes duci poterunt FQH1, FqH2
F.97 quæ binas LI, Li Sectionis Conicæ tangentes de-
98 terminabunt. Ex rectis vero omnibus tranſeun-
99 tibus per F, eæ omnes, quæ tranſibunt per quodvis directricis punctum H3 jacens inter puncta H1,

H2, circulum ſecabunt bis, quævis tranſiens hinc inde per puncta H4, H5, nuſquam circulo occurret. Quare idem accidet & rectis tranſeuntibus per L reſpectu Sectionis Conicæ, & patet punctum H3 fore in iis rectarum LI, Li productarum, qua opus eſt, angulis, in quibus jacet focus F, ut in fig. 97, 98, in angulo H1LH2, qui in illa eſt ipſi ILi ad verticem oppoſitus, in hac eſt ipſe ILi, at in fig. 99 in angulo ILH2, quem continet tangens IL, cum tangente iL producta. Quod autem attinet ad punctum interſectionis P, vel p recedens in infinitum, jam toties vidimus ex num. 149. Puncta vero contactuum I, i jacebunt in ramo citeriori vel ulteriori, vel ita in infinitum recedent, ut nuſquam jam ſint, prout puncta Q, q jacuerint reſpectu directricis in arcu circuli secti a directrice ipſa in N, & n eodem cum centro L, vel in oppoſito, vel inciderint in illa ipſa puncta N, n.

290. Concipiatur autem centrum circuli L1 poſitum citra directricem, vel L2 ultra deferri ex parte A directricis verſus B ita, ut interſectio N ipſius circuli cum directrice primo quidem in fig. 100 diſtet a puncto axis E magis, quam interſectio H aſymptoti CH parallelæ ipſi LN; tum in fig. 101 abeat L in ipſam aſymptotum CH, adeoque N in H, ac demum in fig. 102 tranſcurrat ultra ad partes B, ac arcus quidem NOn jaceat ad eandem directricis partem cum centro L, arcus Non ad oppoſitam, & recta VNu perpetuo tangat ipſum circulum in N. Quoniam ea rectum F. 100 101 102

an-

angulum continet cum NL, & FH cum HC (num. 164), patet, ipſam V*u* fore parallelam ipſi FH, ac focum F relinquere in fig. 100 ad partes B, in ipſum incidere in fig. 101, eum relinquere ad partes A in fig. 102. Quare etiam tangens F*q* jacebit in primo caſu in arcu N*on*, abibit in ſecundo in N, jacebit in tertio in NO*n*, & contactus Hyperbolæ reſpondens ipſi *q* in primo caſu jacebit in ramo citeriore, in ſecundo abibit in infinitum ita, ut nuſquam jam ſit, in tertio jacebit in ramo ulteriore. Cumque idem debeat pariter evenire contactui Q, ubi centrum circuli deveniat ex parte B verſus A, patet, productis aſymptotis HC, *b*C in D, *d*, donec punctum L erit in angulo HC*d*, vel *b*CD, binos contactus terminari ad binos ramos oppoſitos, illo exiſtente in angulo HC*b*, utrumque contactum debere jacere in ramo citeriori, illo jacente in *d*CD, utrumque jacere in ramo ulteriori, illo vero abeunte in alteram aſymptotum, alterum contactum debere abire in infinitum, alterum remanere in eo ramo, ad quem id aſymptoti punctum accedit, at illo demum abeunte in centrum, utrumque contactum ita removeri, ut nuſquam jam ſit.

291. Ex hiſce autem omnibus plurima ſponte conſequuntur, quorum pauca utiliora attingemus. Ex num. 284 conſtat, *Ellipſim Parabolam, ramum Hyperbolæ utrumvis cavitatem obvertere quaquaverſus cuicumque puncto intra ipſas ſito, convexitatem aliquo ſaltem arcu punctis ſitis extra*. Nam ſi aliqua ex parte puncto in-

intra ſito convexitatem obverteret arcus aliquis, poſſet pergendo verſus eum deveniri ad locum, ex quo ad illum tangens duci poſſet. Non poteſt autem punctis intra ſitis obvertere cavitatem, niſi obvertat convexitatem ſitis extra.

292. Ex num.286 patet *in quovis puncto perimetri Sectionis Conicæ nonniſi unicam tangentem haberi poſſe*. Facile autem demonſtrari poſſet, ibi *arcum curvæ utrinque circa contactum jacere ſemper ad eandem tangentis partem*, quod tamen & ex num. 149, & ex num. 288 ſponte fluit; cum nimirum recta ibi motu parallelo delata, hic circumvoluta circa punctum ſitum extra Sectionem Conicam primum incipiat eam contingere, tum in binis hinc inde a contactu punctis ſecare. Inde autem conſequitur *Sectionem Conicam nullibi flexum mutare, ſed perpetuo in eandem plagam incurvari*.

293. Ope ipſius num.286 facile demonſtratur & illud, *licet recta Conicam Sectionem contingat in unico puncto, nullam aliam rectam duci poſſe in angulo, quem eæ binæ lineæ in ipſo contactu conſtituunt*. Nam in fig.93, in qua KP3H3 eſt tangens, ſit quævis FH1, FH5 utcumque parum inclinata ad tangentem circuli FH3, & ea circulum ſecabit iterum alicubi in T1, vel T5, & recta H1P3, vel H5P3 Sectionem Conicam in aliquo puncto P1, vel P5. Sumatur jam punctum quodvis P2, vel P4 ipſi P3 propius, & puncto T2, vel T4 jacente in arcu FT1, vel FT5, ac recta FH2, vel FH4 ſubeunte angulum tangentis circuli H3F, productæ, ſi opus eſt, verſus chor- F.93

dam,

dam, cum ipſa chorda, FT1, vel FT5, ſubibit H2P3, vel H4P3 angulum, quem continet tangens Sectionis Conicæ KP3H3 cum illa FH1, vel FH5, & jacebit in arcu P3P1, vel P3P5, adeoque ut arcus circuli aliquis FT2T1, vel FT4T5 hinc inde a contactu ſubit ſemper inter tangentem, & rectam quamvis tangenti utcumque proximam, ita idem in Sectionibus Conicis evenit.

294. Patet inde *quo pacto dato puncto in Sectionis Conicæ perimetro duci poſſit tangens*, ducendo nimirum inde ad focum rectam P3F, tum huic perpendicularem FH3 uſque ad directricem, ac jungendo puncta H3, P3, quod quidem jam ex num. 173 innotuerat. At hic præterea ex num.288 eruitur *methodus admodum expedita ducendi tangentem ad Sectionem Conicam e puncto L ubivis dato extra ipſum*. Centro L in fig.97, 98, 99, intervallo, quod ad perpendiculum demiſſum ex L in directricem ſit in ratione determinante, deſcribatur circulus, ad quem
F.97 ducantur rectæ FQ, Fq tangentes, quæ occur-
98 rant directrici alicubi in H1, & H2. Rectæ ductæ
99 per ea puncta, & per L contingent Sectionem Conicam, & puncta contactuum I, *i* invenientur ductis FI, F*i* perpendicularibus ad FH1, FH2, quæ ſemper invenientur, præter caſum, quo L cadat in Hyperbolæ aſymptotos. Quod ſi forte altera e tangentibus circuli FQ, Fq evaderet parallela directrici, puncto H1, H2 abeunte in infinitum ita, ut nuſquam jam ſit, ipſa quoque LI, vel L*i* evadet directrici parallela, & contactus I,

vel

vel *i* abibit in verticem axis tranſverſi: Si vero punctum detur in directrice, ut H in fig.53, 54, F.53 circulus quidem evaneſcet, ſed ducta ad focum 54 HF, & chorda P*p* per focum ipſi perpendiculari, habebuntur binæ tangentes H*p*, HP, juxta num.177.

295. Præterea facile deducitur & illud, *rectam, quæ ex concurſu binarum tangentium ad focum ducitur, ſecare bifariam angulum, quem ibi continent bini radii foci ducti ad binos contactus, vel, ubi bini contactus jacent in binis ramis oppoſitis, alter ex iis cum altero producto*. Nam in fig.97 ſi angulis H1FI, H2F*i* re- F.97 ctis (num 173) auferantur anguli LFH1, LFH2 98 æquales ob latera triangulorum FLQ, FL*q* æqua- 99 lia, relinquentur anguli LFI, LF*i* æquales. In fig.98 a rectis QFI, *q*F*i* demptis æqualibus QFL, *q*FL relinquuntur æquales LFI, LF*i*: at in fig.99 producta IF in O, a rectis QFO, *q*F*i* demptis QFL, *q*FL æqualibus, pariter remanent LFO, LF*i* æquales.

296. Poſſet hic etiam facile deduci, *in Ellipſi quamvis rectam per centrum ductam bis occurrere Ellipſi hinc inde a centro, Hyperbolæ autem bis, vel numquam, prout jaceat in illis aſymptotorum angulis, quos axis ſecat, vel in reliquis*, deducendo primum ex num.284, cum nimirum centrum intra Ellipſim jaceat, ſecundum vero ex n. 288, quorum utrumque jam a num.212 deduximus; quin imò aſſumpto centro Ellipſeos, vel Hyperbolæ pro centro circuli L, cujus radius eſſet ipſe ſemiaxis tranſverſus, ut innuimus num.

num. 145, deduci poſſent multa ex iis, quæ in fig. 63, 64 demonſtravimus num. 195.

297. Sed admodum elegans eſt ratio, qua hinc directa demonſtratione deducatur illa Hyperbolæ ad aſymptotos relatæ proprietas, quam num. 221 deduximus ex natura diametrorum per reductionem ad abſurdum: nimirum *ſi chorda* Pp *in fig.* 103, 104, *occurrat aſymptotis in* L, L', *fore* PL, *æqualem* pL'. Si enim aſymptoti occurrant directrici in punctis R, *r*, & pro centro circuli aſſumatur tam L, quam L', patet (num. 290) debere circulos tranſire illum per R, hunc per *r*, & contingi ibidem ab FR, F*r* æqualibus inter ſe cum hic puncta R, *r* ſint illa interſectio aſymptoti cum directrice, quæ in fig. 101 eſt in H, quæ chorda ſi de more occurrat directrici in H, ac recta HF circulis in T, *t*, T', *t'*, erit FP parallela tam LT, quam L'T', & F*p* tam L*t*, quam L'*t'*, ac rectangula TF*t*, T'F*t'* æqualia erunt quadratis æqualibus FR, F*r*. Quare erit FT' ad FT, ſive PL', ad PL, ut F*t* ad F*t'*, ſive ut *p*L ad *p*L', & componendo in fig. 103, dividendo in fig. 104 erit LL' ad LP, ut ipſa LL' ad *p*L', & proinde LP, L'*p* æquales.

F. 103 104

298. Atque ex his omnibus jam patet, quam fœcunda ſit hæc conſtructio. At multa, & multo graviora ſuperſunt, ac ipſa iterum ita fœcunda, ut quocumque te vertas novi ſemper ex eodem veluti trunco rami, e ſingulis ramis ramenta alia, ſurculi, frondes quoquoverſum prorumpant, atque proſiliant. Sequenti Propoſitione præcipuam quandam, & fœcundiſſimam Sectio-

num

num Conicarum proprietatem ex eadem conſtructione deducemus.

PROPOSITIO VI. THEOREMA.

299. *IN rectis omnibus tranſeuntibus per punctum datum quodcumque, & Sectioni Conicæ bis occurrentibus, rectangula, quæ continentur ſub binis diſtantiis puncti ipſius a binis occurſibus ſingularum rectarum, ſunt inter ſe in ratione, quæ pendet a ſola ratione determinante ſpeciem Sectionis Conicæ, & inclinatione rectarum ipſarum, ſubſtituto etiam quadrato tangentis, ubi bini occurſus coeuntes abeant in contactum; manente vero inclinatione binarum rectarum, ac mutato utcumque illo puncto in data Sectione Conica manebit ſemper conſtans ratio unius rectanguli, vel quadrati ad aliud.*

300. Occurrat enim circulo recta KH in fig. 90, 91, 92 in M, *m*, recta vero per L, & F ducta in D, *d*. Erit LP ad TF, ut LH ad TH, & L*p* ad *t*F, ut LH ad *t*H. Igitur conjunctis rationibus erit rectangulum PL*p* ad rectangulum TF*t*, ſive ad rectangulum DF*d*, ut quadratum LH ad rectangulum TH*t*, ſive MH*m*, nimirum ad differentiam quadratorum LH, LM. Jam vero ratio LH ad LM ſive ad LT eſt eadem, ac ratio HP ad PF, ſive quam habet ordinata ad directricem in angulo AHL ad foci radium FP, quæ pendet a ſola ratione determinante ſpeciem Sectionis Conicæ, & inclinatione rectæ LH, cum ſit FP ad PH (num. 2.) in ratione compoſita ex ratione de- F. 90 91 92

ter-

terminante, & ratione ſinus ejus inclinationis ad radium. Pendebit igitur ab iis ſolis etiam ratio quadrati HL ad quadratum LM, & quadrati HL ad eorum quadratorum differentiam, adeoque & ratio rectanguli PL*p* ad rectangulum DF*d*. Sed ſi quævis alia HL eodem modo occurrat in aliis punctis P, *p* manente puncto L, ratio quoque rectanguli ejuſdem DF*d* ad rectangulum novæ PL*p* pendebit a ſola ratione determinante ſpeciem Sectionis Conicæ, & inclinatione hujus novæ LH. Ergo & ratio unius rectanguli PL*p* ad quodvis aliud pendebit a ſola ratione illa determinante, & inclinatione rectarum ipſarum. Quare ſi jam illud punctum, per quod rectæ tranſeunt, mutetur utcumque, ſive ubicumque accipiatur, & per ipſum tranſeant rectæ cum iiſdem ſemper inclinationibus, ea ratio rectanguli pertinentis ad unam ex iis rectis ad rectangulum pertinens ad aliam in omnibus diverſis puncti poſitionibus manebit conſtans, ac patet coeuntibus punctis P, *p*
F.97 in fig.97, vel 98 in I, adeoque in ipſo contactu
98 factis LP, L*p* æqualibus LI, rectangulum PL*p* debere abire in quadratum tangentis LI, quod illi rectangulo ſubſtitui poterit. Patet igitur quidquid erat propoſitum.

SCHOLIUM I.

301. SI rationem ipſam velimus expreſſam ſinibus inclinationis, & algebraicis ſignis, facile obtinebimus. Si nimirum ratio determinans dicatur P ad Q, ſinus autem inclinationis dicatur in prio-

priore S, in poſteriore *s*, erit ratio rectæ FP ad PH in priore ratio SP ad Q, & in poſteriore *s*P ad Q. Quare ratio primi rectanguli ad ſecundum erit compoſita ex rationibus QQ ad QQ—SSPP, & QQ—*ss*PP ad QQ, ſive QQ—*ss*PP ad QQ—SSPP, quæ quidem eſt expreſſio ejus rationis admodum ſimplex.

302. Porro cum Sectiones Conicæ poſſint aliquando in rectas deſinere, proprietas rationis conſtantis rectangulorum in rectis datam directionem habentibus & ſe interſecantibus communis eſt etiam, ubi eæ occurrant binis anguli rectilinei lateribus, ut P*p*, P′*p*′ in fig. 105, 106, F. 105
vel binis rectis parallelis, ut in fig. 107. Id au- 106
tem in iis caſibus multo facilius perſpicitur. 107
Nam manebunt ſemper anguli triangulorum PRP′, *p*R*p*′, adeoque & ratio rectæ RP ad RP′, & R*p* ad R*p*′ erit ſemper eadem; ac proinde ratio quoque rectanguli PR*p* ad rectangulum P′R*p*′.

SCHOLIUM II.

303. DEmonſtratio propoſitionis cum pendeat a conſtructione Problematis tertii, non habet vim, ubi punctum detur in directrice ipſa, quo caſu circulus evaneſcit, nec ubi recta ſit directrici parallela, vel per focum tranſeat, ut notavimus in ipſa Problematis conſtructione. Poſſet quidem & iis caſibus aptari demonſtratio longiore ambitu; ſed ſatis erit notare illud: cum ex generali conſtructione Theorema locum habeat in caſibus omnibus, in quibus punctum

 da-

datum accedit ad directricem quantumlibet; & rectæ ad eas binas poſitiones pariter accedunt quantumlibet, oportet ſane, ut & in iis caſibus ſit vera, in quos generalis conſtructio deſinit, poſtquam ultra quoſcunque limites ad eos acceſſerit.

304. Sic etiam liceret ex propoſitione ipſa deducere hæc bina Theoremata pro rectis axi, vel aſymptoto utrilibet parallelis in Parabola, vel Hyperbola, quarum nimirum altera interſectio ita in infinitum recedit, ut nuſquam jam ſit, conſiderando, quid accidat rectis ad eas directiones accedentibus ultra quoſcumque limites. Sed libet per finitam Geometriam hoſce caſus evolvere ex ipſa conſtructione, cum ex primo potiſſimum pendeat diametrorum omnium natura in Parabola, & aſymptotorum in Hyperbola.

Coroll. 1.

305. *Si recta per datum punctum tranſiens ſit parallela axi in Parabola, & alteri aſymptoto in Hyperbola, quæ nimirum* [*num.* 149.] *altera interſectione ita in infinitum recedente, ut nuſquam jam ſit, in unico puncto occurrat perimetro; in ea pro conſtanti ratione rectangulo ſub binis diſtantiis a binis occurſibus ſubſtitui poteſt rectangulum ſub diſtantia ab unico occurſu, & recta quavis conſtanti in Parabola, vel illi ipſi aſymptoto inclinata in Hyperbola ex ipſo dato puncto in angulo conſtanti, & ratio illa conſtans pendebit præterea a magnitudine rectæ conſtantis in Pa-*

Parabola, & rectæ ductæ in inclinatione ad aſymptotum in Hyperbola.

306. Nam ſi in fig. 108, 109, 110, quarum prima pertinet ad Parabolam, reliquæ ad Hyperbolam, recta HL occurrat bis in Pp perimetro Sectionis Conicæ, recta vero t'L ſemel in P', recta t'FT' per focum tranſeat, erit recta FP' æqualis P't', cum P't' ſit ordinata in angulo æqualitatis, & FP' parallela T'L. Centro F intervallo Ft' inveniatur in recta t'P' punctum I, eritque triangulum iſoſceles IFt' ſimile iſoſcelio FP't', cum habeant unum angulum ad baſim communem in t', adeoque & reliquos æquales. Quare erit It' ad t'F, ut t'F ad t'P', ſive ut FI' ad P'L, adeoque rectangulum ſub It' & P'L æquale erit rectangulo t'FT' ſive rectangulo conſtanti MFm, cui æquatur rectangulum TFt, & quod ad rectangulum PLp in data Sectione Conica, in qua ratio determinans eſt ſemper eadem, habet rationem pendentem a ſola inclinatione rectæ LH juxta Propoſitionis demonſtrationem. F. 108 109 110

307. Porro ſi per F ducatur recta FO in fig. 108 directrici parallela, & in fig. 109, 110 recta tendens ad R occurſum directricis cum aſymptoto parallelâ ipſi Lt', ea ipſam ſecabit in O ad angulos rectos, cum t'P' ſit perpendicularis directrici in fig. 108 ex hypotheſi, & FR occurrat aſymptoto CR ad angulos rectos (num. 164). Quare baſim t'I trianguli iſoſcelii t'FI ſecat bifariam in O. Eſt autem t'O in fig. 108 ſemper conſtans, nimirum æqualis diſtantiæ foci F a directrice, quæ (num. 62) eſt dimidia lateris recti princi-

palis Parabolæ, adeoque $t'I$ ſemper æqualis lateri recto principali, & rectangulum ſub It', & P'L ad rectangulum ſub P'L & quavis recta conſtanti habebit rationem conſtantem, quam habebit latus rectum principale ad illam rectam, quæ proinde pendebit a magnitudine ipſius rectæ,

308. At in fig. 109, 110 eſt t'O ad OR, quæ æquatur diſtantiæ perpendiculari puncti L ab aſymptoto CR, in ratione conſtanti, nimirum ob ſimilitudinem trianguli rectanguli ROt' cum rectangulo FER, cum quo habet angulum æqualem, vel eundem ad R, adeoque cum triangulo rectangulo FRC, in ratione FR ad RC, ſive (num. 166) ſemiaxis conjugati ad ſemiaxem tranſverſum. Quare cum quævis recta in quovis dato angulo inclinata ex L ad aſymptotum CR debeat habere ad rectam ex ipſo L perpendicularem aſymptoto ipſi, ſive ad diſtantiam illam perpendicularem, quæ æquatur OR, rationem conſtantem, quæ pendebit ab inclinatione ejus rectæ; illa ipſa Ot', & recta quoque ejus dupla It' habebunt ad quamvis inclinatam ex L in quovis angulo dato rationem conſtantem pendentem ab ejus inclinatione, compoſitam ex binis conſtantibus t'O vel t'I ad OR, & OR ad eandem inclinatam, adeoque & rectangulum ſub It', & P'L ad rectangulum ſub P'L & ejuſmodi recta inclinata in angulo conſtanti habebit rationem conſtantem pendentem ab inclinatione ejus ipſius rectæ.

Co-

Coroll.2.

309. *Si e quovis puncto* L *in fig.*111 , 112 *ducantur binæ rectæ* LP , Lp *aſymptotis parallelæ, occurrentes perimetro in* P , p , *& ex punctis* P , p *ducantur binæ rectæ* PD , pd *in datis quibuſvis angulis ad aſymptotos alternas* ; *rectangula* LPD , Lpd *erunt in ratione conſtanti*, *mutato utcumque puncto* L , *& ſi inclinationes rectarum* PD , pd *ad ſuas aſymptotos æquales fuerint*, *ratio erit æqualitatis*. F.111 112

310. Nam ſi per L ducatur quævis alia recta in dato angulo, quæ nimirum occurrat perimetro in I, & *i*, tam rectangulum LPD, quam L*pd* habebunt (num.308) rationem conſtantem ad IL*i*, cum IL*i* occurrat perimetro bis , LP ſemel , & tam PD , quam *pd* in datis angulis inclinentur ; adeoque habebunt rationem conſtantem etiam inter ſe . Porrò cum ea ratio pendeat ab inclinatione rectarum PD , *pd* ad aſymptotos , ſi inclinatio fuerit utrobique eadem, ratio utrinſque rectanguli LPD, L*pd* ad idem IL*i* erit eadem, adeoque ipſa erunt inter ſe æqualia.

Coroll. 3.

311. *Si e quovis puncto* P *Hyperbolæ ducantur binæ rectæ* PG , PV *ſingulæ parallelæ alteri aſymptoto*, *& terminatæ ad alteram*, *continebunt rectangulum magnitudinis ſemper conſtantis* , *& ſi ex altero puncto* p *ducantur pariter* pu , pg , *quarum prior ſit parallela* PG , *poſterior* PV , *erunt rectæ* Pp , Gg , Vu *inter ſe parallelæ*, *& concurrentibus* GP, gp, *in* L; VP , up *in* l, *re-*

 cta

ƈa Ll *tranſibit per centrum* C, *& parallelogramma* CGLg, CVlu, LPlp *ſimilia erunt*.

312. Erit enim ex Corollario præcedenti rectangulum LPV æquale rectangulo L*pu*. Quare *pu*, ſive C*g* ad LP, ſive *g*V, ut PV ſive CG ad *l*P, ſive G*u*: adeoque per converſionem rationis C*g* ad CV, ut CG ad C*u*, & rectangulum ſub C*g* & C*u*, ſive ſub *pg* & *pu*, æquale rectangulo ſub CG & CV, ſive ſub PG & PV, quod proinde manebit conſtantis magnitudinis, utcunque mutato puncto P.

313. Jam vero proportionalium terminorum capiendo ſummas, vel differentias, vel ſubſtituendo rectas iis parallelas, & æquales, patebit, fore LP ad LG, ut L*p* ad L*g*, adeoque P*p*, G*g* parallelas, & CG ad C*u*, ut C*g* ad CV, adeoque G*g*, V*u* parallelas, & demum inde CG ad C*u*, ut LG ad *lu*, adeoque triangula GCL, *u*C*l* ſimilia, & eorum angulos ad C æquales, recta C*l*, ſi producatur, qua opus eſt, abeunte in L, unde patent omnia.

SCHOLIUM III.

314. HOC quidem pacto delapſi ſumus ad potentiam illam Hyperbolæ conſtantem, quam demonſtravimus num. 227, cum nimirum hìc habeatur conſtans rectangulum etiam ſub CG, & GP. Inde autem facili regreſſu demonſtrarentur ea omnia, quæ ad aſymptotos pertinentia eruimus e proprietate diametrorum chordas bifariam ſecantium a num. 221, quæ quidem demonſtrari po-

potuiſſent etiam ope num. 297 ∴ At quoniam ea jam demonſtrata ſunt, hic progrediemur ad Corollaria quædam generalia, quæ ab ipſa Propoſitione, vel ab hiſce Corollariis ſponte conſequuntur.

Coroll. 4.

315. *Si per quoddam punctum tranſeant binæ rectæ ſecantes Sectionis Conicæ perimetrum, rectangula ſub binis diſtantiis puncti ipſius a binis ſingularum interſectionibus erunt inter ſe, ut quadrata tangentium iis parallelarum, ſiqua ſunt, a concurſu ad contactum, & ut quadrata ſemidiametrorum parallelarum.*

316. Primum patet ex ipſa enunciatione Propoſitionis, cujus eſt caſus particularis. Nam ſi ex uno puncto ducantur binæ rectæ, & ex alio binæ iis parallelæ; hæ habebunt ad directricem eandem inclinationem, ac illæ. Quare ſi illæ ſecent bis, hæ tangant, illarum rectangula ad ſe invicem, erunt ut harum quadrata. Secundum in omnibus diametris Ellipſeos, & in diametris primariis Hyperbolarum patet ex eo, quod eæ ſemper ad perimetrum Sectionis Conicæ terminentur, & ſecentur bifariam in centro. Debebunt enim rectangula ſub binis ſemidiametris per idem centrum ductis eſſe in eadem ratione, in qua ſunt rectangula rectarum iis parallelarum tranſeuntium per illud aliud quodvis punctum. Pro ſecundariis Hyperbolæ diametris, quæ non terminantur ad perimetrum Hyperbolæ ejuſdem, ſed ad perimetrum conjugatæ, ſic demonſtratur. Occurrat chorda Pp in fig. 113 eidem ramo, $P'p'$ binis, &

F.113 utraque binis in fig.114, prior autem utrobique
114 alteri aſymptoto in G, & per G ducatur chorda I*i* parallela P'*p'*. Erit rectangulum PL*p* ad rectangulum P'L*p'*, ut rectangulum PG*p* ad rectangulum IG*i* (num.299). Sunt autem rectangula PG*p*, IG*i* æqualia (num.251) quadratis ſemidiametrorum ſibi parallelarum.

Coroll.5.

317. *Si plures chordæ, vel tangentes parallelæ ab una aliqua chorda tranſverſim ſecentur, erunt quadrata tangentium; & rectangula ſub ſegmentis chordarum, ut rectangula ſub ſegmentis chordæ tranſverſæ.*

318. Si enim in fig.115, 116 chordæ V*u* oc-
F.115 currant tangentes IA, *ia* inter ſe parallelæ in A, *a*,
116 & chordæ P*p*, P'*p'* in L, L', oportebit eſſe quadrata IA, *ia*, & rectangula PL*p*, P'L'*p'* ad rectangula VA*u*, V*au*, VL*u*, VL'*u* in eadem ratione, adeoque & illa inter ſe, ut hæc inter ſe.

Coroll.6.

319. *Singula ejuſmodi quadrata, vel rectangula tangentium, vel chordarum parallelarum æquantur ſingulis rectangulis ſub ſegmento chordæ tranſverſæ intercepto inter alterum ejus extremum, ac tangentem, vel chordam parallelam, & ſegmento tangentis, vel chordæ parallelæ intercepto inter ipſam chordam tranſverſam, & aliam rectam datam ductam per alterum verticem chordæ tranſverſæ.*

320. Si enim ex quovis puncto chordæ tranſverſæ R ducatur RS iis chordis, vel tangentibus parallela, quæ ſit ad *u*R in ea ratione data, in

qua

qua eſt rectangulum PLp ad VLu, & per u, & S ducatur recta tangentibus occurrens in B, b, chordis in D, D′, erit rectangulum VLD ad rectangulum VLu, ut LD ad Lu, ſive ut RS ad Ru, nempe ut rectangulum PLp ad idem illud VLu. Quare illi rectangulo VLD æquabitur hoc rectangulum PLp, ſive abeuntibus L in A; P, p in contactum I, D in B, æquabitur rectangulo VAB quadratum AI.

Coroll.7.

321. *Si pro chorda tranſverſa ſubſtituatur tangens, quam rectæ parallelæ ſecent, utrumque præcedens Corollarium habebit locum, dummodo rectangulo ſegmentorum chordæ tranſverſæ ſubſtituatur quadratum tangentis interceptæ inter contactum, & parallelas.*

322. Si nimirum in fig. 117 tangens per V ducta occurrat chordis Pp, P′p′ parallelis, & tangenti IA in L, L′, A, erunt rectangula PLp, P′L′p′, & quadratum AI ad ſe invicem, ut quadrata VL, VL′, VA, (num.317.) & ex puncto quovis R tangentis AL ducta RS illis parallela, quæ ſit ad VR in ratione data rectanguli PLp ad quadratum LV, ſi ducatur VS illis rectis parallelis occurrens in D, D′, B, erunt rectangula PLp, P′L′p′, & quadratum AI æqualia rectangulis VLD, VL′D′, VAB F.117

Coroll.8.

323. *Si binis tangentibus* IE, iE *in fig.* 118, 119 *concurrentibus in* E *occurrat tangens ducta per* V *in* A, a, *ejus ſegmenta* AV, aV *erunt in ratione compoſita* AI, ai, & Ei, EI. F.118 119

324. Si

324. Si enim ex A ducatur recta parallela tangenti E*i* occurrens perimetro in P, *p* erit quadratum VA ad quadratum V*a*, ut rectangulum PA*p* ad quadratum *ai*, ſive in ratione compoſita ex rationibus rectanguli PA*p* ad quadratum AI, & quadrati AI ad quadratum *ai*. Cum igitur (num. 317) ſit rectangulum PA*p* ad quadratum AI, ut quadratum E*i* ad quadratum EI, erit quadratum AV ad quadratum *a*V, in ratione compoſita quadrati AI ad quadratum *ai*, & quadrati E*i* ad quadratum EI, adeoque AV ad V*a* in ratione compoſita AI ad *ai*, & E*i* ad EI.

Coroll. 9.

325. *Si tangens* AVa *fig.*120, 121 *binis tangentibus parallelis* AI, ai *occurrat, erit* VA
F.120 *ad* Va, *ut* AI *ad* ai; *quæ ſi præterea in Ellipſi*
121 *fuerit parallela rectæ jungenti contactus bifariam ſecabitur in ipſo contactu.*

326. Erit enim quadratum VA ad quadratum AI, ut quadratum V*a* ad quadratum *ai*. Quare VA ad AI, ut V*a* ad *ai*, & alternando VA ad V*a*, ut AI ad *ai*. Quod ſi in Ellipſi in fig. 120 fuerit A*a* parallela *i*I, erunt AI, *ai* æquales, adeoque æquales & VA, V*a*.

SCHOLIUM IV.

327. HUC uſque deduximns Corollaria ex ipſa Propoſitione. Hoc poſtremum ſponte exhiberet aliud Theorema utiliſſimum ac itidem fœcundiſſimum aliorum quamplurium, quæ

quæ ex eo ultro pariter profluunt. Sed ne nimis late evagemur, id eruam ex alio generaliori, quod reſervo Propoſitioni integræ 8, ex qua ipſum cum ſuis Corollariis pariter fluit. Interea huc uſque deductis alia analoga, quæ a Corollario primo hujus Propoſitionis 6 deducuntur perſequar, quæ nimirum pertinent ad caſum rationis æqualitatis, in quo altera interſectio in Parabola, & Hyperbola ita in infinitum recedit, ut nuſquam jam ſit, ac ſequentia quidem duo Corollaria reſpondent quinto & ſexto e Propoſitione deductis; nam quartum transferri non poteſt ad rectas parallelas axi in Parabola, directrici in Hyperbola, quæ nullam tangentem habent ſibi parallelam, nec ſemidiametrum, diametris nimirum omnibus in Parabola in infinitum productis, & nulla diametro exiſtente in Hyperbola parallela aſymptotis.

Coroll. 10.

328. *Si plures chordæ, vel tangentes parallelæ ſecentur tranſverſim a recta axi parallela in Parabola, vel alteri aſymptoto in Hyperbola, erunt quadrata tangentium, & rectangula ſub ſegmentis chordarum, ut ſegmenta ejus parallelæ abſciſſa ab ipſius concurſu cum perimetro.*

329. Si enim in fig. 122, 123, quarum illa F.122 ad Parabolam, hæc ad Hyperbolam pertinet, re- 123 ctæ VL parallelæ ibi axi, hic alteri aſymptoto, quæ quidem occurret perimetro in unico puncto V (num. 149), occurrant tangentes IA, *ia* inter ſe parallelæ in A, *a*, & chordæ P*p*, P'*p*' in L, L', oportebit (num. 305) eſſe quadrata IA, *ia*, & re-

& rectangula PLp , $P'L'p'$ ad rectangula in Parabola quidem ſub quavis recta conſtanti , in Hyperbola vero ſub recta ducta a punctis A , a , L , L' in dato quovis angulo ad aſymptotum illam ipſi VL parallelam , quæ iccirco conſtans pariter erit , & abſciſſis VA , Va , VL , VL' in ratione conſtanti . Igitur erunt etiam illa quadrata , vel rectangula inter ſe , ut hæc rectangula inter ſe , quæ ob rectam illam conſtantem ſunt , ut ipſæ VA , Va , VL , VL' .

Coroll. 11.

330. *Singula ejuſmodi quadrata , vel rectangula æquantur ſingulis rectangulis ſub ejuſmodi abſciſſis rectæ illius parallelæ axi , vel aſymptoto , & recta quadam data .*

331. Si enim aſſumatur quarta proportionalis poſt quamvis VL , LP , Lp , rectangulum ſub VL , & ipſa æquabitur rectangulo PLp , rectangula autem ſub VA , Va , VL' , & ipſa ad rectangulum ſub ipſa , & VL erunt , ut VA , Va , VL' ad VL , ſive ut quadrata AI , ai , & rectangulum P'L'p' ad rectangulum PLp , adeoque quadrata AI , ai , & rectangulum P'L'p' pariter æqualia rectangulis ſub illa eadem quarta proportionali , & abſciſſis VA , Va , VL' ſingula ſingulis .

SCHOLIUM V.

332. Hujus Corollarii 11. relatio ad Corollarium 6 facilius perſpicietur, ſi aſſumpto pariter in recta VL quovis puncto R , ducatur RS pa-

parallela tangentibus, vel chordis, & æqualis illi conſtanti quartæ proportionali, tum per S ducatur ipſi *VL* parallela, quæ occurrat tangentibus in B, *b*, chordis in *D*, *D'*: erunt enim pariter quadrata AI, *ai*, & rectangula PL*p*, P'L'*p'* æqualia rectangulis VAB, V*ab*, VLD, VL'D', ac figura 115, vel 116 abit in 122 vel 123, ſi puncto *u* in illis ita in infinitum abeunte, ut nuſquam jam ſit, rectæ VR, BS nuſquam jam ſibi occurrant, adeoque parallelæ evadant.

Coroll. 12.

333. *Si in chordam* Vu, *vel tangentem* IB *in* F.124
fig. 124, 125 *incurrant plures recta* LP, L'P' *axi* 125
parallelæ in Parabola, vel alteri aſymptoto in Hyperbola, erunt rectangula VLu, VL'u *ſub ſegmentis chordæ, vel quadrata* IL, IL' *tangentis ibi, ut ſegmenta* LP, L'P' *rectæ illius parallelæ intercepta inter chordam, vel tangentem, & perimetrum, hic ut rectangula ſub iiſdem ſegmentis, & recta in quovis angulo dato ducta ex interſectione ipſius cum chorda, vel tangente, ad aſymptotum parallelam.*

334. Patent ex ipſo Coroll. 1, vel etiam 11: Sunt enim ibi quadrata IL, IL', vel rectangula VL*u*, VL'*u* in Parabola, ut rectangula ſub LP, L'P, & recta conſtanti, quæ rationem non mutat; hic ut rectangula ſub ipſis LP, L'P' & rectis ex L, L' ductis ad aſymptotum parallelam in quovis angulo dato.

Coroll. 13.

335. *Segmenti Parabolici* VMu *in fig.* 126
area eſt ad aream trianguli VMu *habentis pro baſi* F.126
chor-

Digitized by Google

chordam Vu, *&* *verticem in* M *in vertice diametri* MR, *cujus ipſa eſt ordinata*, *ut* 4 *ad* 3; *ad parallelogrammum vero* VEeu *clauſum tangente per* M *ducta*, *&* *proinde ipſi* Vu *parallela*, *ſive ad rectangulum ſub ipſa chorda* Vu, *&* *perpendiculo in eam demiſſo ex eodem vertice*, *ut* 2 *ad* 3.

336. Secta enim bifariam MV in B, agatur per B recta parallela diametro MR, occurrens chordæ *u*V in L, perimetro Parabolæ in D. Patet fore LB ad MR, ut VB ad VM, ut 1 ad 2, vel ut 2 ad 4. Erit autem MR ad LD [n.333] ut rectangulum VR*u* ad rectangulum VL*u*, ſive in ratione compoſita VR ad LV, & R*u* ad L*u*, nimirum 2 ad 1, & 2 ad 3 ſive ut 4 ad 3, ac proinde BL ad LD, ut 2 ad 3, & BL ad BD ut 2 ad 1. Quare & area trianguli BVL dupla erit areæ BVD ob altitudinem communem in V, ſumptis BL, BD pro baſibus. Area autem trianguli VDM pariter dupla eſt areæ trianguli VDB ob baſim VM duplam baſeos VB. Igitur area trianguli VDM erit æqualis areæ BVL, quæ cum ſit ad aream trianguli ſimilis MVR, ut quadratum BV ad quadratum VM, erit, ut 1 ad 4. Eodem vero argumento area trianguli M*du* erit quarta pars areæ MR*u*. Quare totum triangulum VM*u* ad bina triangula VDM, *ud*M ſimul, ut 4 ad 1. Eodem vero pacto ſectis bifariam chordis VD, DM, M*d*, *du* haberentur quatuor triangula, ad quæ priora illa duo ſimul eſsent, ut 4 ad 1 tum octo alia, ad quæ illa quatuor eſſent pariter, ut 4 ad 1, & ita porro, ac ſeries recta-

rum

rum ſemper magis in infinitum accederet ad perimetrum Parabolæ, & area ad aream ſegmenti parabolici, qua concluderetur omnis illa progreſſio in infinitum producta, cujus progreſſionis primus terminus eſſet triangulum VM*u*, & ratio primi termini ad ſecundum, ut 4 ad 1. Quoniam igitur in progreſſionibus geometrice decreſcentibus eſt (cap.3 num.10 Arithm.) differentia primi termini a ſecundo ad primum, ut primus ad totam progreſſionis ſummam, erit ut 3 differentia 4 ab 1 ad 4, ita illud triangulum ad aream ſectoris parabolici. Parallelogrammum vero VE*eu* eſt duplum ejus trianguli, & æquale rectangulo ſub baſi V*u*, & altitudine MI. Igitur erit id parallelogrammum, & id rectangulum ad aream ipſius ſectoris ut 6 ad 4, ſive ut 3 ad 2.

SCHOLIUM VI.

337. NISI ſupra demonſtrata fuiſſet proprietas diametrorum chordas omnes bifariam ſecantium, admodum facile hic ex hac ipſa Propoſitione deduci poſſet pro omnibus diametris Ellipſeos, ac Parabolæ, & pro ſecundariis Hyperbolæ.

338. Si enim ſint binæ tangentes IB, *ib* parallelæ in Ellipſi in fig.127, vel in Hyperbola in fig.128, ac in eas incidat in L, *l* chorda P*p* parallela I*i* iungenti contactus, debebunt rectangula PL*p*, P*lp* ad quadrata tangentium LI, *li* habere rationem eandem; cumque ipſæ IL, *il* æquales F. 127 128

les eſſe debeant, erunt æqualia etiam ea rectangula, adeoque P*l* ad PL, ut *p*L ad *pl*, ſive componendo in Ellipſi, dividendo in Hyperbola L*l* ad PL, ut ipſa L*l* ad *pl* adeoque P*l*, *pl* æquales. Quare ſi ſecta bifariam *i*I in C agatur per C recta CR ipſis tangentibus parallela, quæ nimirum abſcindet rectas RL, R*l* æquales rectis CI, C*i*, adeoque & inter ſe, ea ipſa & chordam P*p* ſecabit bifariam in eodem puncto R.

539. Et eo quidem pacto haberetur proprietas diametrorum omnium in Ellipſi, ſi nimirum concipiatur, tangentes parallelas BI, *bi* in fig. 127 converti circa omnem Ellipſim, converſa cum iis I*i*, & poſitione chordarum P*p*. In Hyperbola vero haberentur omnes diametri ſecundariæ, quæ ſolæ tangentes habent ſibi parallelas. Sed pro primariis hoc pacto progredi liceret. Aſſumpta in fig. 128 CR' æquali CR, & ducta P'L'R'*l*'*p*' parallela rectæ PLR*lp*, debebunt eſſe æquales IL, IL', adeoque æqualia rectangula P'L'*p*', PL*p*, quæ ad æqualia quadrata IL', IL eandem rationem habent. Eſſent autem æquales P'L', *p*'*l*'. Quamobrem ob L'*l*' æqualem L*l*, ſi P'L' eſſet major, vel minor PL, etiam L'*p*' eſſet pariter reſpectu L*p*: adeoque rectangulum P'L'*p*' non erit æquale rectangulo PL*p*, niſi PL æquetur P'L'. Ducta igitur PP', quam CI ſecet in *r*, ea erit parallela LL', & bifariam ſecta in *r*, ut LL' in I, ac CI erit diameter omnes chordas PP' parallelas tangenti LL' ſecans bifariam, & eadem eſt demonſtratio pro chordis *pp*'.

340. At

340. At in Parabola in fig.129 ſi ſit quævis chorda *Pp*, ac e contactu I tangentis ipſi parallelæ ducatur recta parallela axi, ea ipſam chordam ſecabit bifariam in R. Ductis enim PL, *pl* pariter axi parallelis, erunt quadrata IL, *il* ad ſe invicem, ut ipſæ LP, *lp*, quæ cum æquales eſſe debeant, erunt æqualia & ipſa quadrata, & rectæ IL, I*l*, & RP, R*p* ipſis æquales. F.129

341. Porro jam ex ipſa hac demonſtratione patet, in Parabola omnes diametros debere eſſe axi parallelas: ac in Ellipſi, & Hyperbola omnes debere tranſire per centrum, demonſtraretur ex eo, quod omnes chordæ per centrum tranſeuntes in ipſo centro bifariam ſecantur (num. 81) & diametri ejuſmodi chordas etiam ſecare debeant bifariam, adeoque per illud idem centrum tranſire. Atque hæc quidem innuere libuit, ut pateret, quam facile alio prorſus pacto ex eadem definitione ſeries proprietatum deduci poſſet, deducta ante alias hac conſtanti ratione rectangulorum ſub chordarum ſegmentis.

342. Sed iis omiſſis contemplabimur hic potius miram quandam analogiam, quam habent Ellipſes, & Hyperbolæ ſimiles communi centro, & poſitione axis tranſverſi, ac Parabolæ æquales communi poſitione axis, cum aſymptotis Hyperbolarum, quæ profluit partim ex Prop. 5; partim ex hac Prop. 6, & Corollariis.

SCHOLIUM VII.

343. S*I ſint in fig.* 130. *binæ Ellipſes, & in fig.* 131, 132 *binæ Hyperbolæ ſimiles, quarum commune centrum* C, *& axes tranſverſi* Vu, V'u' *poſitione congruant; ac in fig.*133 *binæ*
F.130 *Parabolæ æquales, congruente axium poſitione;*
131 *ordinatarum eandem in utraque poſitionem haben-*
132 *tium diametri poſitione congruent, & ſi quædam*
133 *alterius ordinata* Pp *occurrat alteri in* H, h
jacentibus P, p *in fig.* 131 *in eodem ramo, in fig.* 132 *in ramis oppoſitis, erunt ſemper æqualia ſegmenta* HP, hp, *&* Hp, hP *intercepta hinc inde inter interiorem, & exteriorem.*

344. Si enim ducatur in fig.130, 131 diameter I*i* chordæ P*p*, quæ alteri Ellipſi, & Hyperbolæ occurrat in E, & *e*, tangentes per I, & E ductæ, erunt parallelæ (num.119.). Quare cum ordinata P*p* debeat eſſe parallela tangenti per verticem ſuæ diametri I, erit & H*h* parallela tangenti ductæ per verticem diametri E, adeoque ipſius ordinata. In fig. vero 132 ſi ipſi P*p* diameter parallela I*i* occurrat alteri Hyperbolæ in A, *a*, diameter habens pro ordinata P*p* debet eſſe (num.212.) parallela tangenti ductæ per verticem I, cum debeat eſſe conjugata diametri I*i*, & pariter diameter ordinatæ H*h* parallela tangenti ductæ per A. Cum igitur eæ tangentes parallelæ eſſe debeant, eandem habebunt directionem earum ordinatarum diametri, & cum debeant tranſire per idem centrum commune C, poſitione congruent. Demum in fig.133 ſi concipiatur

tur Parabola HV*b* translata per axem ita, ut ſegmentum axis VF abeat in ſegmentum axis V'F' ſibi æquale, congruet tota cum illa Parabola ſibi æquali ita, ut diameter ER abeat in IR' exiſtente vertice I in eadem diſtantia ab axe, in qua erat, adeoque in eadem recta priore erit diameter IR, & quoniam adhuc tangens per I ducta cum diametro eundem angulum continebit, quem tangens per E, erunt hujuſmodi tangentes parallelæ, & proinde communis directio ordinatarum utriuſque diametri, & communis ordinatarum eandem directionem habentium diameter.

345. Igitur in omnibus ejuſmodi figuris a communi diametro ſecabuntur ambæ ordinatæ P*p*, H*b* bifariam in R; ac proinde erit HP æqualis *bp*, & H*p* æqualis P*b*.

346. *Manente ordinatarum ejuſmodi directione quatuor rectangula* HPh, PHp, Hph, Php *ſemper erunt inter ſe æqualia, & magnitudinis conſtantis, ac ſemper æqualia in fig.*130, 131, 133 *quadrato tangentis* IA, *vel* Ia *ducta per verticem* I *diametri interioris, ac terminata contactu, & perimetro exteriori, ipſa tangente* Aa *ſecta bifariam in* I; *in fig.vero* 132 *differentiæ quadratorum ſemidiametrorum parallelarum* CI, CA.

347. Ducta enim per P, & I recta, quæ alteri curvæ occurrat in M, & N, erit & PM æqualis IN, & MI æqualis PN. Quare rectangulum MPN erit æquale rectangulo MIN. Eſt autem (n.299.) rectangulum MPN ad rectangulum HP*b*, ut MIN ad rectangulum AI*a*. Igitur etiam rectangulum HP*b* erit æquale rectangulo AI*a*. Porro rectan-

gula HP*b*, PH*p*, H*pb*, P*bp*, patet, æqualia eſſe ob PH, *pb*, & H*p*, *b*P æquales, rectangulum autem AI*a* erit in fig. 130, 131, 133 æquale quadrato AI, cum coeuntibus punctis P, *p* in I abeant HP, *bp* æquales in AI, *a*I, & in fig. 132 ob diametrum A*a* ſectam bifariam in C erit rectangulum AI*a* differentia quadratorum CI, C*a*.

348. Hic autem jam patet analogia Sectionis Conicæ externæ reſpectu internæ cum aſymptotis. Segmenta rectæ interceptæ hac externa perimetro, & interna æquantur hic inter ſe (num. 345), ut (n. 221) ſegmenta rectæ interceptæ aſymptotis, & Hyperbola. Ex ea æqualitate infertur hic (num. 346) conſtans menſura illorum quatuor rectangulorum, quæ continentur ſub diſtantia alterius interſectionis cum altera e binis perimetris, & binis interſectionibus cum altera, ut in aſymptotis (num. 251), & ut ibi, ita etiam hic, ubi habetur tangens ordinatis rectis parallela, ea in ipſo contactu ſecatur bifariam, ac illa rectangula æquantur quadrato tangentis interceptæ contactu, & perimetro exteriore. Ubi autem in fig. 132 non habetur tangens parallela æquantur illa rectangula differentiæ quadratorum CI, CA, quæ in aſymptotis, ubi CA evaneſcit, æquantur (num. 251) quadrato toti ipſius CI. At in eo etiam conveniunt. Si enim axis V*u* minuatur in infinitum ita, ut demum evaneſcat, Hyperbola deſinit in binas rectas tranſeuntes per C juxta num. 16 & 110, quæ erunt ipſæ aſymptoti, quo caſu evaneſcente AC, differentia quadratorum CI, CA eſt idem, ac ipſum quadratum CI. Quamobrem

pro-

proprietates aſymptotorum ſunt generales in Hyperbola omnibus Hyperbolis ſimilibus communi centro, & axium poſitione, quæ, axe avaneſcente, deſinunt demum in aſymptotos ipſas, in quibus generales illæ proprietates manent, licet aliquæ ex iis ita immutentur, ut remaneant accommodatæ ipſis rectis, & evaneſcentiæ axis tranſverſi, ac ex natura rectæ lineæ cum iis ipſis proprietatibus conjuncta deducantur alia Theoremata.

349. Et quidem in ejuſmodi ſimilibus perimetris analogia cum aſymptotis in Hyperbola, & Parabola etiam ulterius progreditur. Nam in iis, ubi in infinitum producuntur, perimeter exterior ad interiorem accedit ultra quoſcunque limites, quin tamen unquam ſibi occurrant. In Ellipſi quidem perimetrorum diſtantia eſt ſemper finita, & quidem minima in ipſis axium conjugatorum verticibus, maxima in verticibus tranſverſorum. At in Hyperbola in fig. 131, & in Parabola in fig. 133 recedente ordinata P*p* in infinitum, creſcit ipſa in infinitum, adeoque creſcit in infinitum & H*p* ipſa major, & cum ſit H*p* ad AI, ut IA ad *pb*, ob rectangulum illud æquale quadrato AI, ipſa *pb* decreſcit pariter in infinitum. Sed cum H*p* nuſquam abeat in infinitum (nam omnes chordæ parallelæ alicui ſecanti bis eundem ramum inclinantur ad directricem (num. 149) in angulo minore, quam ſit angulus æqualitatis), & proinde eam ſecant bis, ac omnes pariter in Parabala bis ſecent (n. 154] nuſquam *pb* evaneſcet.

SCHOLIUM VIII.

350. SEd jam regrediendum ad ſeriem Theorematum hiſce ſcholiis interruptam, ac eruemus proprietatem maxime notabilem, quæ licet ſit quoddam ſimplex veluti Corollarium ipſius Propoſitionis 6, tamen hic nova Propoſitione 7 enunciabitur, cum nimirum naturam ipſam Sectionum Conicarum contineat, & uſum habeat frequentiſſimum,

PROPOSITIO VII. THEOREMA.

351. *QVadratum ſemiordinatæ cujuſvis diametri primariæ in Ellipſi & Hyperbola ad rectangulum ſub abſciſſis a binis verticibus eſt in coſtanti ratione, nimirum ut quadratum diametri, vel ſemidiametri conjugatæ ad quadratum ejus diametri vel ſemidiametri, ſive ſi, ut in axe, tertia continue proportionalis poſt diametrum ipſam, & diametrum conjugatam dicatur parameter, vel latus rectum, & ipſa diameter latus tranſverſum, erit, ut latus rectum, vel parameter ad latus tranſverſum, vel diametrum illam ipſam. In Parabola vero æquatur rectangulo ſub abſciſſa ab unico diametri vertice, & recta conſtanti, quam dico parametrum; vel latus rectum, & quæ æquatur ordinatæ per focum ductæ, ac æquatur quadruplæ diſtantiæ verticis diametri a foco; vel a directrice.*

352. Pro

352. Pro Ellipſi, & diametris primariis Hyperbolæ, in fig. 134, 135 haberi rationem conſtantem quadrati ſemiordinatæ LP, vel Lp ad rectangulum VLu ſub binis abſciſſis a binis verticibus V, u patet ex Propoſitionibus 5, & 6. Nam ex Prop. 6 rectangulum PLp ad rectangulum VLu habet rationem conſtantem, manente ordinatarum directione, & ex Prop. 5 recta Pp bifariam ſecatur in L, adeoque rectangulum PLp æquatur quadrato PL, vel pL. Idem pro Hyperbola conſtat etiam ex num. 256. F. 134 135

353. Eam rationem eſſe eandem, quam parametri, vel lateris recti ad diametrum, vel latus tranſverſum, patebit ex definitione parametri, ſi demonſtretur eſſe eandem, ac rationem quadrati diametri, vel ſemidiametri conjugatæ ad quadratum diametri, vel ſemidiametri primariæ. Id autem pro Ellipſi patet in fig. 134, cum diametri omnes in ea terminentur ad perimetrum; adeoque ſi ACa ſit diameter conjugata, eſſe debeat in eadem illa ratione rectangulum ACa ad rectangulum VCu, ſive quadratum AC ad quadratum VC, adeoque & quadratum Aa ad quadratum Vu. Pro Hyperbola demonſtratum eſt num. 256.

354. In Parabola vero in fig. 136 cum rectangulum PLp, ſive quadratum PL ſit per Coroll. 1. Prop. 6 ad rectangulum ſub abſciſſa VL, & quavis recta conſtante in ratione conſtanti, ſi ſemel aſſumatur pro recta illa conſtanti, ſive pro parametro tertia proportionalis poſt aliquam abſciſſam, & ejus ſemiordinatam, F. 136

jam quadràtum ſemiordinatæ fiet æquale rectangulo ſub àbſciſſa, & ea parametro, adeoque ea ratio conſtans in reliquis omnibus ordinatis erit ratio æqualitatis.

355. Quod ſi ordinata P'L'p' tranſeat per focum F, & diameter LV occurrat directrici in H, erit (num. 178) VL' dimidia L'H, & L'H dimidia P'p', ac proinde æqualis P'L'. Quare erit L'V ad L'P', ut L'P' ad P'p', & proinde ordinata P'p' per focum ducta erit illa parameter conſtans, quæ erit quadrapla VH, adeoque & quadrupla VF. Q. E. D.

SCHOLIUM I.

356. CUm ex hac quoque Propoſitione plurima conſectaria profluant, ordinem quemdam in iis deducendis perſequar. In primis quæ omnes Sectiones Conicæ communia habent in diametris omnibus cum iis, quæ initio de axibus ſunt demonſtrata Corollario 1. indicabo; tum deducam bina, quæ Parabolæ ſoli ſunt propria, quibus demonſtratis progrediar ad Theoremata quædam pertinentia ad Ellipſim, & Hyperbolam generaliter: demum occaſione nacta comparationis Ellipſeos cum circulo, plures ejus proprietates evolvam.

Coroll. 1.

357. *Quæ deducta ſunt pro ordinatis axis tranſverſi in Corollariis* 8, 10, 12, 13 *definit.* 2 *num.* 74, 79, 83. 85, *eadem locum habent in* *ondi-*

ordinatis diametrorum omnium, ſi pro axe conjugato ponatur in binis poſtremis diameter conjugata.

358. Demonſtratio eſt eadem utrobique, petita pariter ex ratione conſtanti, quam habet quadratum ſemiordinatæ ad rectangulum ſub abſciſſis, & quod pertinet ad Coroll. 13 demonſtratum eſt pro Hyperbola num. 256.

Coroll. 2.

359. *Latus rectum cujuſvis diametri in Parabola æquatur lateri recto principali, & quadruplæ abſciſſæ a vertice axis per ordinatam ductam ex ejus diametri vertice.*

360. Eſt enim in fig. 65 parameter diametri transeuntis per P quadrupla (num. 351) PD, adeoque quadrupla ER compoſitæ ex EM quarta parte lateris recti principalis, & MR ejuſmodi abſciſſæ a vertice. F.65

Coroll. 3.

361. *Si e quovis puncto* L *chordæ* Vu *Parabolæ in fig.* 124, *vel tangentis* IL *in fig.* 125. *ducatur* LP *axi parallela uſque ad perimetrum, erit ibi rectangulum* VLu, *hic quadratum* IL *æquale rectangulo ſub* PL, *& latere recto ejus diametri, cujus ibi chorda* Vu *eſt ordinata, & quæ hic tranſit per contractum* I. F.124 125

362. Secta enim in fig. 124 chorda V*u* bifariam in R, & erecta RM parallela axi, quæ erit (n. 206, & 212) diameter ejus chordæ, erit quadratum VR, ſive rectangulum VR*u* (num. 351) æquale rectangulo ſub RM, & latere recto diametri ipſius. Erit autem rectangulum VL*u* ad rectan-

ctangulum VRu (num.333.) ut rectangulum ſub LP, & illa parametro aſſumpta pro conſtanti, ad rectangulum ſub RM, & eadem parametro, adeoque & rectangulum VLu erit æquale rectangulo ſub LP, & eadem parametro. Porro ſi coeuntibus V, u ſecans L'Vu abeat in tangentem, quadratum ejus tangentis debebit æquari rectangulo ſub L'P', & ea parametro. Sed idem in fig. 125. patebit, ſi in diametrum IR axi, adeoque ipſi PL parallelam ducatur ſemiordinata PR, quæ erit parallela, & æqualis LI. Erit enim quadratum RP æquale rectangulo ſub IR, & parametro diametri IR, adeoque & quadratum IL æquale rectangulo ſub LP, & eadem parametro.

Coroll. 4.

363. *In Ellipſi, & Hyperbola diametri conjugatæ ſunt ſibi invicem conjugatæ.*

364. Pro Hyperbola demonſtratum eſt etiam (num.244.), ſed pro utraque ſic evincitur communi demonſtratione. Sint in fig. 137, 138 binæ ordinatæ Pp, P'p' eidem diametro Vu æqualiter diſtantes a centro C per CL, Cl, & proinde æquales (num.357, & 79). Si ducatur per centrum C diameter ACa parallela ordinatis Pp, P'p', ea ſecabit chordas PP', pp' bifariam, cum L'P, L'P', & $l'p$, $l'p'$ debeant æquari æqualibus CL, Cl, ac proinde habet ipſas chordas PP', pp' pro ordinatis. Igitur binæ diametri Vu, Aa ejuſmodi ſunt, ut alterius ordinatæ ſint alteri mutuo parallelæ, adeoque (num.212) ipſæ diametri ſibi mutuo conjugatæ ſunt.

F. 137
138

Co-

Coroll. 5.

365. *Si communem diametrum habeant plures Ellipſes, vel plures Hyperbolæ eandem primariam diametrum, ordinatæ vero ſint in quibuſvis angulis inclinatæ ad ipſas diametros; ſemiordinatæ ad idem diametri punctum pertinentes erunt in omnibus in conſtanti ratione inter ſe, quam habebunt diametri conjugatæ, & idem reſpectu Ellipſium contingit ſemiordinatæ ad circulum, & reſpectu Hyperbolarum tangenti ex eodem puncto diametri ductæ ad circulum ipſum eadem diametro deſcriptum, habita ipſius circuli diametro pro diametro ejuſdem conjugata, cui tangenti ſemiordinata Hyperbolæ æquilateræ æqualis erit.*

366. Si enim in fig. 139; 140 ejuſmodi Ellipſium, vel Hyperbolarum ſemiordinatæ fuerint F. 139
LP, LP', erunt, invertendo in proportione hujus 140
Propoſitionis 7, quadrata ſemiordinatarum LP LP' ad quadrata ſuarum ſemidiametrorum conjugatarum in eadem ratione communis rectanguli VLu ad quadratum communis ſemidiametri CV, adeoque & LP ad ſuam ſemidiametrum conjugatam, ut LP' ad ſuam, ac proinde alternando LP ad LP', ut altera ſemidiameter conjugata ad alteram.

367. Quod ſi in fig. 139 VPu ſit circulus, in eo quadratum LP æquatur rectangulo VLu, & ſi in fig. 140. ducatur LT tangens ad circulum VTu, quadratum ipſius æquatur rectangulo VLu. Quare etiam in iis erit quadratum LP figuræ 139, & LT fig. 140. ad quadratum ſemidiametri

metri circuli, ut rectangulum VL*u* ad quadratum CV, nimirum in ratione æqualitatis, ac proinde manebit demonſtratio. In Hyperbola vero æquilatera diametri conjugatæ erunt æquales, (num. 260), adeoque ratio quadrati LP' in fig. 140 ad rectangulum VL*u*, vel quadratum LT ratio æqualitatis, adeoque LP' æqualis LT.

Coroll. 6.

368. *In eodem caſu chordæ P*p, *P'*p' *ductæ per vertices binarum ordinatarum pertinentium ad bina communia diametri puncta* L, *l*, *vel tangentes ductæ per bina extrema puncta* P, P' *ordinatarum pertinentium ad commune diametri punctum* L *concurrent in ipſa diametro alicubi in* Q, *quod etiam in Ellipſi cum circulo comparata contingit, in qua icirco erit abſciſſa a centro ad ſemidiametrum, ut hæc ad diſtantiam tangentis a centro comparatam in ipſa diametro.*

369. Patet ex lemmate generali num. 204. Erit enim LP ad LP', ut *lp* ad *lp'*, adeoque rectæ P*p*, L*l*, P'*p'* ad idem punctum Q convergent. Accedente autem puncto *l* ad L, donec cum ipſo congruat, evaneſcentibus ſimul chordis P*p*, P'*p'*, ſimul ambæ ſecantes *p*PQ, *p'*P'Q abibunt in tangentes, & adhuc ipſæ tangentes in eodem diametri puncto Q concurrent. Porro ſi in fig. 139. VP*u* ſit circulus, & PQ tangens, angulus CPQ erit rectus, & ſimilia triangula CLP, CPQ ob angulum ad C communem, adeoque CL ad CP, ſive CV, ut CV ad CQ.

SCHO-

SCHOLIUM II.

370. Plures hinc Ellipſeos proprietates profluunt ſane elegantiſſimæ, tam quæ ad ejus diametros conjugatas pertinent, quam quæ ad ipſius comparationem cum circulo, quæ quidem Hyperbolæ vel nullo modo conveniunt, vel non omnino communes ſunt. Eas aliquot Corollariis perſequar eo ordine, quo aliæ ex aliis oriuntur.

Coroll. 7.

371. *In Ellipſibus, annumerato iis etiam circulo, habentibus diametrum communem, ſi ordinatæ ductæ per vertices binarum diametrorum, quarum ſingulæ ad ſingulas pertineant, tranſeant per idem cujuſvis diametri punctum, tranſibunt etiam ordinatæ ductæ per vertices diametrorum conjugatarum per aliud diametri punctum commune.*

372. Sint enim in fig. 141 ſemidiametri CP, CP', & ordinatæ ad communem diametrum V*u* ductæ per P, P' tranſeant per idem diametri V*u* punctum L. Sit quoque C*p* ſemidiameter conjugata CP, adeoque parallela tangenti PQ, & ducta ſemiordinata *pl*, tum ſemiordinata *lp'*, demonſtrandum eſt fore C*p'* ſemidiametrum conjugatam CP'. Sic autem facile demonſtratur. Tangens ducta per P' terminatur ad idem punctum Q, & ob ſimilia triangula *pl*C, PLQ eſt C*l* ad *lp*, ut QL ad LP, & (num. 365) *lp* ad *lp'*, ut LP ad LP'. Quare ex æqualitate ordinata C*l* ad F. 141

pl'.

lp' ut QL ad LP', adeoque ob angulos QLP', Clp' in parallelis æquales, ſimilia erunt triangula QLP', Clp', & Cp' parallela QP', adeoque conjugata ſemidiametri CP'.

Coroll. 8.

373. *In Ellipſi ſi ad quamvis diametrum* uV, *e verticibus* P', p' *diametrorum quarumvis conjugatarum ducantur ſemiordinatæ* P'L, p'l, *alterius abſciſſa a centro* CL *erit media proportionalis inter alterius abſciſſas* Vl, ul *a binis verticibus, ac ſumma quidem quadratorum binarum abſciſſarum a centro* CL, Cl *æquabitur quadrato ſemidiametri* CV, *in quam eæ demiſſæ ſunt, ſumma vero quadratorum ſemiordinatarum* P'L, p'l *quadrato ſemidiametri* CA' *conjugatæ ipſius* CV.

374. Si enim eadem diametro ſit circulus VPu, & erigantur ſemiordinatæ LP, lp erit (num. 371) Cp parallela tangenti QP, adeoque angulus PCp æqualis alterno CPQ recto in contactu. Quare bini anguli PCL, pCl ſimul æquantur recto. Cum igitur æquentur recto & bini PCL, CPL in triangulo rectangulo CLP, erit angulus CPL æqualis pCl, & proinde ſimilia triangula CPL, pCl, quæ præterea ob baſes CP, Cp æquales erunt æqualia, adeoque CL æqualis lp mediæ proportionali inter Vl, *ul* ex circuli natura. Præterea vero ſumma quadratorum CL, Cl æquabitur quadrato CP, ſive quadrato CV; cumque ſit Cl, ſive PL ad LP', & CL, ſive lp ad lp', ut ſemidiameter CA ad ſemidiametrum CA' conjugatam CV, erit & ſumma quadratorum Cl, CL ad ſummam quadratorum LP', lp', ut quadratum CA,

ſeu

ſeu CV æquale illi primæ ſummæ ad quadratum CA', quod proinde erit æquale ſummæ peſteriori.

Coroll. 9.

375. *Summa quadratorum diametrorum, ſeu ſemidiametrorum conjugatarum in Ellipſi conſtanter æquatur ſummæ quadratorum axium, vel ſemiaxium; parallelogrammum, cujus latera ſemidiametri conjugatæ, rectangulo ſub ſemiaxibus; ac parallelogrammum Ellipſi circumſcriptum, quod continent tangentes ductæ per diametrorum conjugatarum vertices rectangulo ſub axibus, cujus parallelogrammi angulorum vertices erunt ſemper in perimetro Ellipſeos alterius priori ſimilis, cujus latera ad ejus latera homologa erunt in ratione ſubduplicata 2 ad 1.*

376. Nam in fig. 142. ſi V*u* fuerit axis Ellipſeos VP'*u*, & diameter circuli VP*u*, & CP', C*p*' F. 142 ſemidiametri conjugatæ, ductis P'LP, *p*'*lp* axi perpendicularibus uſque ad circuli peripheriam, tum CP, C*p*, erit quadratum CA ad quadratum CA', ut quadratum LP ad quadratum LP', & quadratum *lp* ad quadratum *lp*'; adeoque ut ſumma quadratorum LP, *lp* ad ſummam quadratorum LP', *lp*', ſeu ob PL æqualem C*l* (num. 373) ſumma quadratorum PL, *pl* æquatur ſummæ C*l*, *lp*, ſive quadrato C*p*, vel CA. Igitur & ſumma quadratorum LP', *lp*' æquatur quadrato CA'. Cum vero etiam C*l* æquetur LP, adeoque bina quadrata C*l*, CL æquentur binis PL, CL, ſive quadrato CP, vel CV, quatuor quadrata LP', *lp*', CL, C*l*, ſive bina ſemidiametrorum conjugatarum CP', C*p*' æquabuntur binis quadratis ſemia-

ſemiaxium CA', CV, adeoque & quadrata diametrorum conjugatarum quadratis axium.

377. Ductis autem *p*L, *p*'L, erunt, ut CA ad CA', tam areæ triangulorum P*p*L, P'*p*'L, & PCL, P'CL, quæ, cum ſint inter eaſdem parallelas, ſunt ut baſes LP, LP', quam areæ triangulorum *p*L*l*, *p*'L*l*, & *p*C*l*, *p*'C*l*, quæ pariter ſunt ut baſes *pl*, *p*'*l*. Sunt igitur in eadem ratione & tota quadrilinea PL*lp*, P'L*lp*', & triangula PCL, P'CL, ac *p*C*l*, *p*'C*l*, adeoque & reſidua triangula PC*p*, P'C*p*'. Eſt autem triangulum PC*p* rectangulum ad C dimidium rectanguli ſub PC, C*p*, ſive ſub VC, CA, & triangulum P'C*p*' dimidium parallelogrammi P'C*p*'T. Quare erit rectangulum ſub AC, & CV ad parallelogrammum P'C*p*'T pariter, ut CA ad CA', ſive ut idem rectangulum ſub AC, & CV ad rectangulum ſub CA', & eadem CV, nimirum ad rectangulum ſub ſemiaxibus, cui proinde æquale erit illlud parallelogrammum.

378. At in fig. 143 ſi QT*qt* ſit parallelogrammum tangentium ductarum per vertices
F.143 P, *p*', P', *p* diametrorum conjugatarum P*p*', P'*p*, ſatis patet ob ipſarum tangentium parallelismum cum ipſis diametris, fore inter ſe æqualia quatuor parallelogramma CT, CQ, C*t*, C*q*; quorum proinde cum ſingula, ut CT, æquentur rectangulo ſub ſemiaxibus, ſimul omnia æquabuntur rectangulo ſub axibus. Ducta vero CQ, quæ Ellipſi occurrat in V, chordam P*p* ea bifariam ſecabit in R, & ibidem ab ea bifariam ſecabitur; cum ſint binæ diametri parallelogrammi,

mi, eritque PP' ordinata ſemidiametri VC, adeoque (num.368) CR ad CV, ut CV ad CQ, & CQ ad CV in ratione ſubduplicata CQ ad CR, ſive 2 ad 1. Pariter ſi P'p', CT ſibi occurrant in r, & CT Ellipſi in B, erit CT ad CB in ratione ſubduplicata CT ad Cr, ſive 2 ad 1, adeoque Q, T ad hujuſmodi Ellipſim per num. 119.

Coroll. 10.

379. *Diametrorum omnium in Ellipſi maxima eſt axis tranſverſus, minima axis conjugatus, reliquarum ea major, quæ axi tranſverſo propior, ac binæ hinc inde in angulis cum ipſo æqualibus æquales.*

380. Nam in fig. 142 ſi Vu ſit axis tranſverſus, qui conjugato ſemper eſt major (num.64), erit LP major, quam LP' in eadem ratione; adeoque quadratum CP æquale quadratis CL, PL erit majus quadrato CP, quod eſt æquale quadratis CL, LP'; ac proinde CP, vel CV major quam CP', & axis tranſverſus duplus CV major quavis diametro dupla CP'. F.142

381. Porro quoniam quadratum PL ad quadratum P'L eſt in conſtanti ratione, in eadem ratione creſcent, & decreſcent & ipſa, & eorum differentia. Creſcit autem ſemper ſinus PL in circulo, dum P ab V ad A tendit, decreſcente CL, ac in A eſt maximus; adeoque & differentia quadratorum LP', LP, quæ eadem eſt, ac differentia quadratorum CP, CP', ſemper creſcit ab V ad A, vel A'; & proinde cum

L qua-

quadratum CP ſit ſemper idem, decreſcet perpetuo CP', & abeunte P' in A' fiet minimum. Quare diametri quoque quo magis diſtant ab axe tranſverſo eo minores ſunt, & axis conjugatus eſt omnium minimus.

382. Demum ſi Ellipſis completa occurrat ipſi PP' in I, erit LI æqualis LP', adeoque & CI æqualis CP', & angulus LCI æqualis LCP'. Quare binæ ſemidiametri CP', CI hinc inde in æqualibus angulis ab axe tranſverſo æquales, adeoque æquales & integræ diametri.

Coroll. 11.

383. *Diameter, per cujus verticem ducta ordinata ad axem habebit abſciſſam a centro ejuſmodi, ut ejus quadratum ſit dimidium quadrati ejuſdem ſemiaxis, habebit diametrum conjugatam ſibi æqualem, & ea, datis axibus, facile determinatur.*

384. Si enim fuerint CP', Cp' æquales, erunt æquales & anguli P'CL, p'Cl, adeoque & CL, Cl, nimirum (ſi Cp' fuerit conjugata CP') CL, LP, & quadratum CL dimidium quadrati CP, ſive CV. Dato autem axe aV, ſi fiat angulus VCP ſemirectus, tum capta CP æquali CV, ducatur PL' perpendicularis ipſi axi, & capiatur LP' ad LP in ratione ſemiaxis CA' ad ſemiaxem CV, erit P'C ſemidiameter, quæ ſuæ conjugatæ æqualis erit.

Coroll. 12.

385. *Si eodem axe ſit Ellipſis, & circulus; erit area circuli ad aream Ellipſeos, ut is axis ad alterum, quæ ratio erit eadem in ſegmentis communes abſciſſas habentibus; ac area*

area totius Ellipſis erit media geometrice proportionalis inter areas circulorum habentium pro diametris binos ejus axes, ſive circuli circumſcripti & inſcripti, ac æqualis areæ circuli habentis diametrum mediam geometrice proportionalem inter binos axes.

386. Si enim V*u* ſit jam axis uterlibet, & circulus rectæ PP' occurrat in I', erit PI' ad IP' ſemper ut PL ad LP', ſive ut ſemiaxis CV ad CA', ſive ut totus axis V*u* ad axem alterum. Quare & areæ genitæ eodem motu earundem rectarum PI', IP' erunt in eadem ratione, nimirum area ſegmenti PVI' ad ſegmentum IVP', & area totius circuli ad aream totius Ellipſeos.

387. Porro cum hinc area circuli habentis pro diametro axem tranſverſum ſit ad aream Ellipſeos, ut axis tranſverſus ad conjugatum, & area Ellipſeos ad aream circuli habentis pro diametro axem conjugatum ſit iterum, ut axis tranſverſus ad conjugatum, erit area Ellipſeos media inter areas illorum circulorum, & cum quævis ſemidiameter ſit minor ſemiaxe tranſverſo, major ſemiaxe conjugato, patet, circulum deſcriptum, aſſumpto pro radio illo priore, fore circumſcriptum, aſſumpto vero hoc poſteriore, fore inſcriptum. Cumque areæ circulorum ſint in ratione duplicata diametrorum, patet, circulum pariter habentem diametrum mediam geometrice proportionalem inter binos axes, habiturum aream pariter mediam inter areas eorundem illorum circulorum, & æqualem areæ Ellipſeos.

SCHOLIUM III.

388. Atque hoc quidem pacto multa deduximus, quæ Ellipſi ita propria ſunt, ut ad Hyperbolam ſaltem eodem pacto transferri non poſſint, licet ſuas habeat Hyperbola ipſa proprietates, quæ earum pleriſque reſpondeant. Sic nonnullis eorum, quæ hìc proponantur n.373, 375, 379 reſpondent, quæ pro Hyperbola propoſita ſunt num.253, 248, 244.

389. Ex ipſa Propoſitione facile deducitur, *datis latere tranſverſo, & recto, ac directione ordinatarum, vel datis in Ellipſi & Hyperbola binis diametris conjugatis magnitudine, & poſitione, poſſe inveniri omnia Sectionis Conicæ puncta*. Aſſumpta enim quavis abſciſſa in latere tranſverſo, & ducta recta in ea directione, quam habere debent ordinatæ, quæ nimirum in Ellipſi, & Hyperbola parallela eſt diametro conjugatæ, ſatis erit pro Parabola aſſumere in ipſa hinc inde binas ſemiordinatas medias proportionales inter abſciſſam, & latus rectum, in Ellipſi, & Hyperbola aſſumpta media proportionali inter binas abſciſſas a binis verticibus, ſatis erit aſſumere hinc & inde binas ſemiordinatas, quæ ad eam ſint in ratione ſimplici diametri conjugatæ ad diametrum illam, in qua aſſumpta eſt abſciſſa, ſive in ratione ſubduplicata lateris recti ad illam diametrum. Habebitur enim, ut patet, debitus ſemiordinatæ valor. & mutata utcunque abſciſſa, deſcribetur omnis Sectio Conica per puncta.

390. Sed

390. Sed ut pro Hyperbola ex datis binis diametris conjugatis elegantiſſimam, & expeditiſſimam conſtructionem habuimus num.269 ope regulæ gyrantis circa datum punctum inter binas aſymptotos, ſic hic pariter habemus aliam nihilo minus expeditam, & elegantem conſtructionem Ellipſeos per puncta, datis itidem binis diametris conjugatis, idque pariter ope regulæ alia quadam data lege gyrantis inter datas binas rectas.

391. Sint binæ diametri conjugatæ in fig.144, 145 VC*u*, ACP. Ex alterius vertice A demiſſo in alteram perpendiculo AB, capiatur AD in eodem, vel ad partes A producto, ut in fig. 144, vel verſus B, ut in fig.145, AD æqualis ſemidiametro CV, ac per C, & D ducta indefinita EF, productaque indefinite utrinque V*u* in G, & H, moveatur linea BD ita, ut puncto B excurrente per rectam GH, ac puncto D per EF abeat in *db*; & punctum A abiens in *a* deſcribet Ellipſim. Ducta enim ex *d* recta parallela DB; quæ occurrat rectis AP, V*u* in L, N, erit (num.204) *d*L ad *d*N, ut DA ad DB, ſive ut *da* ad *db*. Quare ducta *a*L, erunt ſimilia triangula *ad*L, *bd*N; adeoque *a*L parallela diametro VC*u*. Erit autem DA ad *d*L, ut AC ad LC, adeoque quadratum DA, ſive CV ad differentiam quadratorum DA, *d*L, ſive *da*, *d*L, nimirum ad quadratum *a*L, ut quadratum AC ad differentiam quadratorum AC, LC, ſive ad rectangulum ſub abſciſſis AL, LP. Quare alternando quadratum VC ad quadratum AC, ut quadratum *a*L ad rectan- F.144 145

 gulum

gulum ALP ſub abſciſſis, & proinde *a*L æqualis ſemiordinatæ, & punctum *a* ad Ellipſim.

392. Qnod ſi in fig. 146, 147 V*u*, AP fuerint axes, conſtructio evadet facilior. Sumpto
F. 146 enim in axe CA ſegmento AD vel ad partes op-
147 poſitas centri C, ut in fig. 146, vel verſus ipſum, ut in fig. 147, & notatis in regula punctis D, C, A, ipſa regula ita convertatur, ut punctum C excurrat per axem VC*u* in *c*, puncto D excurrente per ACP in *d*, ac punctum A translatum in *a* diſcribet Ellipſim. Ducta enim *a*L parallela VC, erit *da* ad *d*L, ut *ca* ad CL, adeoque quadratum *da*, ſive CV ad differentiam quadratorum *da*, *d*L, ſive quadratum *a*L, ut quadratum *ca*, ſive CA ad differentiam quadratorum *ca*, CL, ſive CA, CL; nimirum ad rectangulum ALP, adeoque alternando quadratum CV ad quadratum CA, ut qradratum L*a* ad rectangulum ALP, ut oportebat.

393. Quoniam vero illa puncta *a*, *b*, *d* in fig. 144 145, vel *a*, *c*, *d* in fig. 146, 147 poſſunt etiam notari in extremo rectilineo chartæ margine, & charta ipſa ita translata, ut puncta *b*, *d*, vel *c*, *d* ſemper ſint in rectis GH, EF, notari, facile poſſunt quotcumque puncta *a*, & per ea duci linea continua; admodum facile Ellipſis deſcribitur. Solet autem & inſtrumentum conſtrui reſpondens fig. 147, in quo virga *dca* habeat in *a* ſtylum, in *c*, & *d* binos pedes inſertos ita crenis in lamina incavatis ſecundum directiones CV, C*u*, CA, CP, ut per ipſas excurrant, ac ſtylus *a* motu continuo Ellipſim de-
ſcri-

ſcribat, & ut plurima Ellipſium genera deſcribi poſſint, virga paratur longior, per quam ſtylus *a*, & pedes *c*, *d* poſſint excurrere, & admoveri ad ſe invicem, ac removeri ita, ut *da* fiat æqualis ſemiaxi tranſverſo *ca* conjugato.

394. Ovalem lineam, quæ referat Ellipſim, ſic etiam ope circini licebit deſcribere. Fiat in fig. 148. F. 148
rhombus quivis HDBE, cujus latera ad partes angulorum oppoſitorum B, & H producantur: tum centris B, & H, quovis, ſed utrobique eodem intervallo, deſcribantur arcus circuli FG, IL, ac centris E, & D reliqui FL, GI, qui apte connectentur cum prioribus in F, G, I, L, cum perpendiculares ſint iiſdem EF, DG, DI, EL, habentibus eorum centra. Quin etiam ſi dentur in fig. 149. axis major VC*u*; & minor ACP, facile F. 149
ſic determinabitur rhombus HDBE, cujus ope ejuſmodi ovalis fiat. Centro C radiis C*u*, CA fiant quadrantes circuli *u*K, AS occurrentes in K, S ipſis CA, C*u*. Ducatur A*u* occurrens arcui AS in G, ac per quodvis punctum I arcus DG ducatur recta CI occurrens quadranti *u*K in L, ducanturque rectæ *u*L, AI, per quarum concurſum F ducta recta parallela ipſi LC, quæ occurrat rectis C*u*, CP in B, E, aſſumptiſque CH, CD verſus V, & A æqualibus CB, CE, habebitur rhombus quæſitus EBDH. Nam triangula FB*u*, FEA erunt ſimilia iſoſceliis LC*u*, ICA, adeoque arcus circuli radio B*u* abibit in F, & radio EF in A.

395. Pro quovis rhombo ſic facilius invenietur quadratum. Sumatur AN verſus P æqualis *u*C, tum CM verſus *u* æqualis CN, ductaque MN, ac

biſariam ſecta in R, ſumantur MB, NE ad partes oppoſitas C æquales MR, vel NR, & CH, CD æquales ipſis CB, CE, ac habebitur intentum. Patet enim HDBE fore quadratum, ob æqualia triangula BCD, DCH, HCE, ECB. Ductis autem RB, RC, & RO parallela NE, ob CM, CB æquales CN, CE patet, MN, BE fore parallelas, & proinde angulum RBO æqualem alterno MRB, ſive MBR ob MB, MR æquales, vel CBR. Angulus quoque ROB æqualis eſt ſemirecto NEO, ſive ſemirecto BCR, & BR communis triangulis BRC, BRO. Igitur erit OB æqualis CB, & ducto arcu *u*F, erit OF æqualis C*u*, ſive NA. Quare additis EO, EN, æqualibus eidem NR, erit & EF æqualis EA, ac arcus radio EF abibit in A. Sed hæc conſtructio locum non habet, ubi CN differentia ſemiaxium ſit ita magna, ut MB evadat major, vel æqualis M*u*.

SCHOLIUM IV.

396. PRogrediemur jam ad aliud Theorema deducendum e Prop.6, ac pariter fœcundiſſimum plurimorum pertinentium potiſſimum ad tangentes, quorum nonnulla etiam e Corollariis ipſius Prop.6, deduci poterant, ut monui num.327. Ordinem deductionis indicabo in Scholiis interjectis.

PROPOSITIO VIII. THEOREMA.

397. S*I per concurſum* Q *fig.* 150, 151, 152 *tangentis* PQ *cum diametro* QR *ducatur recta occurens perimetro ſectionis Conicæ in* T, t, *& ordinatæ* Pp *in* K, *erit* QK *media harmonica*

ce proportionalis inter QT , Q*t in fig.*150, 151, *in quibus* T, t *ſunt in eodem ramo , vel* KT, K*t in fig.*152 , *in qua eadem jacent in ramis oppoſitis .*

398. Ducta enim recta Q*p*, agantur per T, *t* rectæ parallelæ ipſi P*p* occurrentes rectis QP, QR , Q*p* in H, *b*, I, *i* , L, *l*, & perimetro iterum in S, *s* . Quoniam ordinatæ TS, *ts* a diametro pariter bifariam ſecantur in I , *i* , & (num.204) rectæ HL, *bl* a recta QR debent ſecari bifariam in I, *i*, ut recta P*p* in R; erunt & HS, *bs*, æquales TL, *tl*, & rectangula THS, *tbs* rectangulis HTL , *btl* . Porro cum ſit HT ad *bt*, & TL ad *tl*, ut QT ad Q*t*; erit quadratum QT ad quadratum Q*t*, ut rectangulum HTL ad rectangulum *btl* , ſive ut rectangulum THS ad rectangulum *tbs*, nimirum (num.321) ut quadratum PH ad quadratum P*b* , vel ut quadratum KT ad quadratum K*t* . Quare QT ad Q*t*, ut KT ad K*t* . Sunt autem QT, Q*t* in fig.150, 151 trium QT , QK, Q*t* extremæ, & KT, K*t* differentiæ extremarum a media , ac in fig.152 hæ extremæ trium KT, KQ, K*t*, illæ differentiæ earundem a media . Habetur igitur utrobique ratio harmonica propoſita. F.150 151 152

S C O L I U M I.

399. SI recta QK ſit parallela axi in Parabola, vel alteri aſymptoto in Hyperbola, puncto *t* ita in infinitum recedente, ut nuſquam jam ſit, fiet juxta num.25 QT æqualis TK . Sed que-

quoniam eo caſu in Parabola QK deberet congruere cum diametro QR, eum ipſum caſum, qui nimirum uſui futurus eſt, accurate poſt hoc Scholium per finitam Geometriam demonſtrabo.

400. Quod ſi punctum R abiret in centrum; Pp in fig. 150, 151 evaderet diameter, & tangens PH diametro RQ parallela, adeoque punctum Q abiret in infinitum, quo caſu recta Tt pariter parallela tangenti bH, eſſet ordinata diametri Pp, & ab ea bifariam ſecaretur in K, quod pariter congruit cum iis, quæ num. 25. demonſtrata ſunt de harmonicæ proportionis ratione in æqualitatem deſinente, ubi alterum e quatuor punctis extremis abit in infinitum.

401. In caſu vero, in quo QK evadat diameter, & congruat cum QR, punctum T ubique, & t in Ellipſi, ac Hyperbola evadit ejus vertex, adeoque evaneſcentibus TS, ts, fiunt HL, bl tangentes, & rectangula HTL, btl evadunt quadrata tangentium, quo tamen caſu adhuc demonſtratio vim habet, & in caſu Ellipſeos, ac Hyperbolæ coincidit cum demonſtratione Coroll. 9. Propoſitionis 6. expoſiti num. 325, in qua ſeriem quandam confectariorum ejuſdem Propoſitionis abrupimus, ut num. 327. monui, ne nimis late evagaremur, huc reſervatis iis, quæ jam deducemus.

Coroll. I.

402. *Tangens* PQ *in fig.* 153, 154, *& ordinata per idem punctum* P *ducta in Ellipſi, & diametris* Vu *primariis Hyperbolæ, ipſam*

ipſam diametrum ſecant in Q, *&* R *in eadem ratione directa, & ad eandem centri partem, in Parabola in fig.155, abſcindunt ſegmenta* VR, VQ *a vertice æqualia*, F.153 154 155

403. Nam in fig.153, 154 puncta Q, V, R, *u* reſpondent punctis Q, I, R, *i* fig.150, 152. Ac proinde eſt VQ ad *u*Q, ut VR ad R*u*. Idem autem erueretur etiam ex illo Coroll.9. Prop. 6: ſi enim tangentes per V, & *u* ductæ occurrant tangenti PQ in A, & B, erunt parallelæ, & per id Corollarium erit AV ad B*u*, ut AP ad PB, adeoque VQ ad Q*u*, ut VR ad R*u*.

404. Inde autem ſequitur puncta Q, & R debere jacere ad eandem centri partem, quia binæ diſtantiæ VQ, VR ab eodem vertice V, quæ ſunt primus & tertius proportionis terminus, debent eſſe vel ſimul majores, vel ſimul minores quam binæ diſtantiæ ab altero vertice *u*, adeoque jacere ad eandem partem centri verticibus interjecti, ad quam jacet vertex propior.

405. In Parabola vero in fig.155 ſic per finitam Geometriam demonſtratur, fore QV, VR æquales. Præterea diameter ducta per P occurrat tangenti ductæ per V in M, ordinatæ in *r*, ac ex concurſu A binarum tangentium ducatur AN diametris, & axi parallela uſque ad perimetrum. Erunt ob parallelifmum æquales QV, P*r*, & VR, MP, adeoque etiam QR, M*r*. Erit autem (num.328) QV ad AN, ut quadratum QP ad quadratum PA, ſive ut quadratum QR ad quadratum VR, & AN ad MP, ſive VR, ut quadratum VA ad quadratum VM, ſive ut quadratum

tum *r*P ad quadratum *r*M, vel ut quadratum QV ad quadratnm QR. Igitur ex æqualitate perturbata, erit QV ad VR, ut quadratum QV ad quadratum VR, quod oſtendit eam eſſe rationem æqualitatis; erit enim rectangulum ſub QV & ſe ipſa, nimirum ejus quadratum, ad rectangulum ſub QV, & VR, ut ipſum quadratum QV ad quadratum VR, adeoque rectangulum ſub QV & VR æquale quadrato VR, ſive QV æqualis VR.

Coroll. 2.

406. *In Ellipſi & diametris primariis Hyperbolæ ſegmenta diametri* VR, VQ, *quæ abſcindit ab altero vertice* V *ordinata* PRp, *& tangens* PQ *per idem punctum* P *ductæ, ſunt ut ejuſmodi ſegmenta abſciſſa ab altero vertice, & ea ratio in Ellipſi eſt minoris, in Hyparbola majoris inæqualitatis, in Parabola æqualitatis.*

407. Patet primum ex præcedentis Corollarii proportione. Nam alternando eſt VQ ad VR, ut *u*Q ad *u*R, ſive invertendo VR ad VQ, ut *u*R ad *u*Q. Patet ſecundum, quia ordinata P*p* ſecat diametrum in R in Ellipſi inter vertices V*u*, in Hyperbola extra; cum debeat (num. 149) jacere ibi inter binas tangentes ſibi parallelas tranſeuntes per diametri vertices (num. 212), hìc extra. Iacebit igitur contra Q ibi extra, hìc intra, & in Ellipſi *u*R erit minor, quam *u*Q, in Hyperbola major. In Parabola vero ex Corollario ſuperiore æquantur VQ, VR,

Chor-

Coroll. 3.

408. *Si tangens* VM *ducta per verticem* V *diametri occurrat in* M *recta tranſeunti per quodvis perimetri punctum* P, *& per alterum verticem* u *in Ellipſi, & Hyperbola, ac diametri parallelæ in Parabola, ea ſecabitur biſariam in* A *a tangente ducta per* P, *ac in Parabola tangentes* VM, PQ *ductæ per binos binarum diametrorum vertices* V, P, *& terminatæ ad ipſas diametros ſe mutuo ſecant biſariam in* A.

409. Erit enim in fig. 153, 154 B*u* ad AV, ut *u*Q ad VQ, adeoque (num. 406) ut *u*R ad VR, nimirum ut *u*P ad PM, vel demum ut eadem B*u* ad AM, adeoque AV, AM æquales. At in fig. 155 ob QV dimidiam QR, erit VA dimidia PR, vel VM, & QA dimidia QP, ac proinde æquales & AV, AM, & AQ, AP.

SCHOLIUM II.

410. HActenus Propoſitionis conſectaria quædam deduxi, quæ a rationis harmonicæ proprietatibus non pendent. Nunc quoniam puncta quoque Q, R, V, *u* in Ellipſi & Hyperbola harmonicam proportionem conſtituunt, cujus tum priora illa duo, tum hæc poſteriora alterna ſunt, deducam ea, quæ ex proprietatibus ejuſdem harmonicæ proportionis conſequuntur, ſecta diſtantia binorum alternorum V, *u* biſariam a centro C, quarum bina potiſſimum demonſtravi num. 22, 26. Quod autem ibi in fig. 6. ſunt pun-

puncta A, R, B, C, D, hoc hic in Ellipſi in fig. 153. ſunt puncta, *u*, C, R, V, Q, & in Hyperbola in fig. 154. *u*, C, Q, V, R. Primum autem prioris proprietatis conſectaria, tum poſterioris perſequar.

Coroll. 4.

411. *In Ellipſi, & Hyperbolæ diametris primariis ſemidiameter* Cu, *vel* CV *eſt media geometrice proportionalis inter* CQ, CR *diſtantias ordinatæ* Pp, *& tangentis* PQ *in eadem diametro aſſumptas, quæ ad eandem centri partem jacent ambæ.*

412. Patet primum ex num. 22. ob proportionem harmonicam punctorum Q, R, V, *u*: quorum alterna ſunt V, *u*, & eorum diſtantia ſecta eſt bifariam in C. Debere autem R, & Q jacere ad eandem partem centri C patet ex num. 402.

Coroll. 5.

413. *In iiſdem eſt* CR *abſciſſa a centro ad* Ru *abſciſſam ab uno vertice, ut* VR *abſciſſa ab altero, ad* RQ *ſubtangentem.*

414. Cum enim ſit CR ad CV, ut CV ad CQ, erit in eadem ratione & RV differentia ipſarum CR, CV ad VQ differentiam ipſarum CV, CQ, adeoque CR ad CV, ut VR ad VQ, & proinde CR ad R*u* priorum ſummam, ut VR ad RQ ſummam poſteriorum.

Coroll. 6.

415. *In Hyperbola in fig.* 156 *ſemidiameter* F.156
quoque ſecundaria CV, *vel* C*u eſt media geometrice proportionalis inter* CR, CQ *diſtantias ordinatæ* Pp, *& tangentis* PQ *in eadem diametro aſſumptas, ſed eæ ad partes oppoſitas jacent, & tangens, ac ordinata diametrum ipſam conjugatam ſecant in eadem ratione, ſed reciproca.*

416. Si enim diametro primariæ D*d* conjugatæ ipſius V*u* occurrat tangens PQ in I, ſemiordinata ſua PE parallela ipſi V*u* in E, erunt EP, EC æquales RC, RP, eritque RQ ad CQ, ut RP, ſive CE ad CI, nimirum ob CI, CD, CE continue proportionales (num.411), ut quadratum CE vel RP ad quadratum CD. Quare dividendo RC ad CQ, ut differentia quadratorum RP, CD ad quadratum CD. Eſt autem (num.351) quadratum CP, vel CR ad rectangulum DE*d*, ſive differentiam quadratorum CD, CE, vel CD, RP, ut quadratum CV ad quadratum CD; adeoque alternando quadratum CR ad quadratum CV in eadem illa ratione differentiæ quadratorum RP, CD ad quadratum CD. Igitur erit RC ad CQ, ut quadratum RC ad quadratum CV, adeoque RC CV, CQ ſunt continue proportionales.

417. Jacebit autem CQ ad partes oppoſitas CR, quia cum CI, CE jaceant ad eaſdem partes (num.411) tangens PQ prius incidet in diametrum primariam CD, quam in ſecundariam V*u*, ac proinde jacebit Q ultra centrum reſpectu PR.

418. Jam

Digitized by Google

418. Jam vero ſi capiatur Cq æqualis, & contraria CQ, ob CR, CV, Cq continue proportionales, & Cu æqualem CV, quatuor puncta q, V, R, u conſtituent proportionem harmonicam (num.24) adeoque erit VR ad Ru, ut Vq ad qu, ſive ut uQ ad QV, & diameter Vu ſecta in Q, & in R in eadem ratione, ſed reciproca.

Coroll. 7.

419. *Semidiameter quævis in Ellipſi & Hyperbola eſt media proportionalis inter ſemiordinatam diametri ipſi conjugatæ, & ſuum ſegmentum interceptum inter centrum, ac tangentem per extremum ſemiordinatæ ductam.*

420. Si enim in fig.153, 154 ſit PE ſemiordi-
F.153 nata ad diametrum CD conjugatam CV, erit
154 æqualis CR, adeoque erit (num.411) ipſa EP ad CV, ut CV ad CQ. Si vero in fig.153 ſemidiameter CD producatur uſque ad tangentem QP in H, cum ſit pariter CE æqualis ſemiordinatæ PR, erit CD media inter CE, CH (num.411), adeoque inter PR, CH. In figura vero 154 cum CV ſit media inter CR, CQ, erit media inter ſemiordinatam EP, & ſegmentum CQ.

Coroll. 8.

421. *In quavis Sectione Conica tangentes ductæ per extrema puncta cujuſvis ordinatæ, coeunt in aliquo puncto ejus diametri, cujus ea eſt ordinata, ac ſi plures Ellipſes annumerato iis etiam circulo, vel plures Hyperbolæ communem habeant diametrum, tangentes ductæ per extrema puncta ordinatarum eandem abſciſ-*

ſam

ſam habentium convergent ad idem ejuſdem diametri punctum. Si autem Hyperbola communem cum Ellipſi, vel circulo habeat diametrum primariam, & hujus tangens cum illius ordinata congruat in ipſa diametro, concurret etiam hujus ordinata cum illius tangente.

422. Tangentes per extrema ordinatæ puncta ductas concurrere in diametro, demonſtratum eſt etiam num. 216; tangentes Ellipſium & circuli, vel Hyperbolarum communem habentium diametrum, & abſciſſam, concurrere in eodem diametri puncto, demonſtratum eſt num. 368. Idem hic patet, quia in Parabola diſtantia concurſus cum diametro utriuſque tangentis ductæ per bina extrema puncta ordinatæ a vertice ipſius diametri debebit eſſe æqualis eidem abſciſſæ, ac in reliquis omnibus caſibus Ellipſium, & Hyperbolarum exiſtente abſciſſa a centro, & ſemidiametro communi, debebit eſſe communis etiam diſtantia concurſus tangentis cum diametro ab ipſo centro, & ad eandem partem jacere. Pro circulo autem eſt itidem manifeſtum; quia ſi in F.157 fig. 157 PQ ſit tangens, PR ſemiordinata circuli; in triangulis rectangulis ſimilibus CRP, CPQ erit CR ad CP, ut CP ad CQ, adeoque CP, ſive CV media itidem inter abſciſſam CR, & diſtantiam CQ a tangente.

423. Quod ſi fuerit VP*u* vel circulus, vel Ellipſis, & V*p* Hyperbola eadem diametro primaria V*u*, & RP ſemiordinata prioris, ac R*p* poſterioris tangens pertineat ad idem diametri punctum R, etiam prioris tangens ducta per P, ac

 poſte-

poſterioris ſemiordinata per *p* debent convergere ad idem punctum Q diametri, cum pro utraque debeat eſſe illa CQ tertia poſt CR, CV.

Coroll. 9.

424. *Tangens* Aa, *vel* Bb *in fig.*153, 154, 155 *per diametri verticem* V, *vel* u *ducta*, *& terminata ad tangentes* PQ, pQ *ductas*
F.153 *per extrema puncta ordinatæ* Pp *in ipſo ver-*
154 *tice ſecatur bifariam*, *& binæ rectæ* Ba, bA
155 *jungentes in Ellipſi, & Hyperbola angulos oppoſitos quadrilinei* AabB *earum quatuor tangentium, tranſeunt per concurſum* R *ordinatæ cum diametro*.

425. Patet primum (num.204), cum P*p* ſecetur bifariam in R, & rectæ PQ, RQ, *p*Q per idem punctum Q tranſeant. Secundum ſic demonſtratur. Cum ſit V*a* æqualis VA, erit ipſa ad B*u*, ut VA ad ipſam B*u*, ſive ut VQ ad Q*u*, vel ut VR, ad *u*R: adeoque ob angulos RV*a*, R*u*B in parallelis æquales, ſimilia triangula RV*a*, R*u*B, & anguli ad R æquales, ac proinde recta *a*R producta ex parte R in fig.153, ex parte *a* in fig.154 congruet cum RB.

SCHOLIUM III.

426. HÆc quidem profluxerunt ex illa prima proprietate proportionis harmonicæ indicata num. 410, & propoſita num.22; nunc progrediar ad alteram ibidem indicatam, & propoſitam num.26 nihilo minus fœcundam.

Co-

Coroll. 10.

427. *In Ellipſi, & Hyperbola in fig.* 153, 154 *ſunt geometrice proportionales tum quatuor diſtantiæ* QV, QR, QC, Qu *concurſus* Q *tangentis cum diametro a vertice* V, *ab occurſu ordinatæ* R, *a centro* C, *& ab altero vertice* u; *tum quatuor* RQ, RV, Ru, RC, *occurſus ordinatæ* R *ab occurſu tangentis* Q, *a vertice* V, *ab altero vertice* u, *& a centro* C.

428. Eſt proprietas (num.26) proportionis harmonicæ quatuor punctorum *u*, V, R, Q, quorum alterna V, *u*, & eorum diſtantia dividitur biſariam in C, adeoque Q, & R ſunt reliqua bina in biſſectione non aſſumpta, & Q eſt extremum in fig.153, R in 154.

Coroll. 11.

429. *Si tangens ducta per extremum ordinatæ punctum* P *in fig.* 158, 159 *occurrat tangentibus ductis per vertices diametri* V, u *in* A, *&* a, *& ſemidiametro conjugatæ* CD *in* H, *erunt tam* RP, CH *mediæ, licet non continue proportionales, quam ſemidiameter* CD *media continue proportionalis inter binas tangentes* VA, ua. F.158 159

430. Nam VA, RP, CH, *au* erunt ad ſe invicem ut QV, QR, QC, Q*u*, quæ (num.427) ſunt in geometrica proportione, quamobrem inter VA, *au* erunt mediæ RP, CH, adeoque erit etiam media CD; quæ (num.419) eſt media inter ipſas PR, HC, ſemiordinatam nimirum, & ſegmentum diametri conjugatæ interceptum centro C, ac tangente PQ.

Coroll. 12.

431. *Rectangula, quæ continentur ſub binis tangentibus parallelis* VA, ua *interceptis inter contactus, & quamvis aliam tangentem* QP, *ac ſub binis hujus ſegmentis* PA, Pa *interceptis inter illas, & contactum æquantur quadratis ſemidiametrorum parallelarum iis ipſis tangentibus alterum alteri.*

432. Cum enim (num. 429) CD ſit media inter tangentes AV, *au*, erit ejus quadratum æquale rectangulo ſub iiſdem. Quod ſi CI ſit ſemidiameter parallela tangenti QP, erit (n. 315) tam AV ad AP, quam *au* ad *a*P, ut CD ad CI; adeoque rectangulum ſub AV, *au* ad rectangulum AP*a*, ut quadratum CD ad quadratum CI. Cum igitur rectangulum ſub AV, *au* æquetur quadrato CD, etiam rectangulum AP*a* æquabitur quadrato CI.

Coroll. 13.

433. *Rectangulum* QPH *ſub ſegmentis tangentis cujuſvis interceptis inter contactum, & binas quaslibet diametros conjugatas eſt æquale quadrato ſemidiametri* CI *parallelæ ipſi tangenti.*

434. Cum enim ſit (num. 427) VR ad RQ, ut CR ad R*u*, erit etiam AP ad PQ, ut HP ad P*a*; adeoque rectangulum QPH æquale rectangulo AP*a*, ſive (num. 431) quadrato CI.

SCHO-

SCHOLIUM IV.

435. His deductis progrediendum ad alia, quæ inde profluunt, ſi conſideretur præterea perpendiculum ductum e centro in tangentem, vel e puncto contactus ad tangentem ipſam uſque ad axem utrumvis, nimirum ad proprietates perpendiculi in tangentem, & normalium terminatarum ad axes ipſos, ubi cum diametris & axibus comparantur, quæ & elegantes ſunt per ſeſe, & ſummi ſæpe uſus in Aſtronomia, ac Phyſica.

436. At interea in binis Scholiis ad alia quædam nihilo minus utilia digrediemur. In primis notandum illud, ope hujus poſtremi Corollarii F. 160 *admodum facile definiri axes datis binis diametris conjugatis*. Si enim ſint in fig. 160, 161 161 diametri conjugatæ PC*p*, IC*i*, & ducta per P recta indefinita HQ parallela I*i*, quæ nimirum debet eſſe Ellipſeos, & Hyperbolæ tangens, ac ſumpta PS æquali dimidio lateri recto diametri P*p* in Ellipſi in fig. 160 in CP producta, in Hyperbola in fig. 161 verſus C, ſectaque bifariam CS in T, agatur TG perpendicularis ipſi CS, donec occurrat HQ in G, ac centro G intervallo GC, GS, quæ intervalla patet fore æqualia, inveniantur in ipſa tangente puncta Q, H; rectæ CV, CH determinabunt poſitiones axium, & ſumpta CV media geometrice proportionali inter CQ, CR, & CD inter CE, CH, tum ſumptis C*u*, C*d* ipſis æqualibus ad partes oppoſitas, habebuntur axes V*u*, D*d*,

 437. Cum

437. Cum enim circulus tranſire debeat per puncta C, S, Q, H, erit rectangulum HPQ æquale rectangulo CPS, adeoque quadrato CI mediæ nimirum inter CP, & dimidium latus rectum; angulus HCV rectus erit, ut oportebat, in axibus, & CD, CV erunt mediæ inter CE, CH, & CR, CQ, quæ nimirum haberi debebant in ejuſmodi Ellipſi, vel Hyperbola, exiſtente HPQ tangente parallela diametri I*i* conjugatæ P*p*.

438. Erit autem in fig. 160 axis tranſverſus is, qui evadet longior, in fig. 161 is, cujus occurſus cum tangente ut Q eſt propior contactui P. Inventis axibus facile (num. 124, & 125) inveniuntur foci, & datis focis, ac axe tranſverſo invenitur (num. 90) directrix, atque adeo Conica Sectio ex definitione, qua ab initio uſi ſumus. Porro deſcripta iis axibus Sectione Conica, ea neceſſario tranſibit per punctum P, & habebit P*p*, I*i* pro diametris conjugatis. Erit enim quadratum CV ſive rectangulum ſub CR, CQ, ad rectangulum VR*u*, ſive differentiam quadrati CR a quadrato CV, ſive a rectangulo ſub CR, & CQ, nimirum rectangulum ſub RC & RQ, ut CQ ad RQ, ſive CH ad RP, vel ad CE, nimirum (num. 411) ut quadratum CD ad quadratum CE, ſive ad quadratum RP, adeoque alternando quadratum CV ad quadratum CD, ut rectangulum VR*u* ad quadratum RP; ac proinde ipſa RP erit ſemiordinata, & perimeter tranſibit per P, cujus tangens erit (num. 411) HTQ ob CR, CV, CQ continue proportionales, & CI, C*i* ſemidiameter conjugata, cum tangenti

paral-

parallela ſit, & ejus quadratum æquetur rectangulo HPQ, juxta num.433.

439. Hinc autem illud conſequitur: *ſi in quadam figura rectæ* Bb *in dato angulo inclinatæ ad datam rectam* Vu *ſecentur bifariam ab ipſa in* K, *vel inter puncta* V, u, *ut in fig.*162, *vel extra ut in fig.*163, *ac ſint quadrata* BK, *ut rectangula* VKu, *ſive, quod eodem redit, quadratum* KB *ad rectangulum* VKu *in data ratione; ea figura erit Ellipſis in primo caſu, Hyperbola in ſecundo.* Secta enim bifariam V*u* in C, & ducta per C recta IC*i* in eodem illo angulo ita, ut quadrata CI, C*i* ad quadratum CV ſint in illa eadem ratione, ac conſtructis Ellipſi & Hyperbola, quæ habeant ipſas V*u*, I*i* pro diametris conjugatis, ejus Ellipſeos, vel Hyperbolæ ſemiordinata quævis pertinens ad punctum K debebit congruere cum KB, vel K*b*, cum debeat eſſe parallela I*i* (num.212) & debeat (num.351) ejus quadratum ad rectangulum VK*u* eſſe in eadem illa ratione quadrati VC ad quadratum CI, adeoque ejus figuræ puncta omnia congruent cum punctis ejuſmodi Ellipſeos, vel Hyperbolæ. F.162 163

440. Id vero ſummo uſui erit infra, ubi demonſtrandum erit, Cono non per verticem ſecto, obvenire unam e tribus Conicis Sectionibus initio definitis, & proinde habere omnes proprietates, quas ex illa definitione deduximus. Sed præterea addendum, illud, *ſi in fig.* 164 *quadrata ſemiordinatarum* BK *fuerint, ut abſciſſæ* PK *a vertice diametri* PK, *curvam fore Parabolam, cujus parameter tertia continue proportionalis poſt quamvis abſciſ-* F.164

 ſam,

ſam, & ſuam ſemiordinatam BK. Nam in ea curva productum ſub parametro, & quavis alia abſciſſa erit æquale quadrato ſuæ ſemiordinatæ, cum hoc aliud quadratum ad illud prius debeat eſſe, ut rectangulum ſub ſua abſciſſa, & illa recta ad rectangulum ſub abſciſſa priore, & recta eadem. Data autem diametro PK, & directione ordinatarum B*b*, ac magnitudine unius ex iis, vel parametro, tertia poſt abſciſſam PK, & ſemiordinatam KB, determinatur focus, & directrix Parabolæ, quibus datis, datur Parabola ipſa, quam debere congruere cum ejuſmodi curva, facile demonſtratur.

441. Producta nimirum diametro KP, donec ſit PM quarta parametri pars, recta AM ipſi PM perpendicularis erit directrix. Ducta vero PQ parallela ordinatis, & facto angulo QPF æquali QPM, ac recta PF æquali PM, erit F focus: Si enim foco F, directrice AM deſcribatur Parabola, erit (num. 1) P ad ipſam ob PF æqualem PM: erit PQ tangens (num. 181) ob angulum MPF ſectum bifariam a PQ; erit PK diameter (num. 206), & ejus parameter (num. 351) quadrupla PM. Quare ejus ordinata congruet cum B*b* & directione, & magnitudine, cum debeat eſſe parallela tangenti PQ, & ſemiordinatæ quadratum æquale (num. 351) rectangulo ſub PK, & parametro, adeoque æquale quadrato KB, vel K*b*.

SCHOLIUM V.

442. EOdem pacto plurima alia Problemata ex demonſtratis Theorematis ſolvi facile poſſunt, in quibus vel ſe quiſque, vel Tyronem Præceptor exercere poterit. Nonnulla hic innuam, ex quibus conſtet, *datis 5 punctis determinari Sectionem Conicam, ac proinde binas Sectiones Conicas non poſſe occurrere ſibi mutuo, vel circulo, qui inter Ellipſes enumerari poteſt, in pluribus, quam in quatuor punctis.*

443. In primis *datis binis chordis parallelis, patet, dari directionem unius diametri*, ſectis nimirum ipſis chordis bifariam, & per ſectionum puncta ducta recta indefinita. Hinc autem *dato arcu Sectionis Conicæ facile poteſt inveniri ejus centrum*. Si nimirum ducantur bina paria chordarum parallelarum, quarum ſingula determinabunt ſuarum diametrorum directionem, quæ proinde diametri, ſi concurrant, determinabunt centrum ipſius Sectionis, quæ ſi diametri evaſerint parallelæ erit Parabola, centro in ea in infinitum abeunte; & ubi eæ convergunt, ac centrum determinant, arcus ille ad Ellipſim, vel Hyperbolam pertinebit, (num.83) prout ipſum centrum fuerit propius longiori e binis chordis parallelis, vel breviori, quæ ſi forte æquales evaſerint, ſatis erit aliam chordam ducere aliquanto propiorem centro, quam ſit altera e ductis, & videre, an chorda ipſa priore longior evaſerit

rit, an brevior. Quanquam idem patebit etiam (num. 218), videndo, an arcus centro cavitatem, an convexitatem obvertat.

444. *Datis binis chordis parallelis inæqualiter a centro diſtantibus, adeoque inæqualibus (num. 83), & centro, facile inveniri poſſunt binæ diametri ſibi invicem conjugatæ, vel ſi centro in infinitum abeunte, conſtet, Sectionem Conicam debere eſſe Parabolam, facile invenietur unius diametri vertex, & parameter, quibus datis cum ipſa ordinatarum poſitione, datur (num. 436, 438, 441) Sectio Conica.*

445. Sint in fig. 165, 166, 167, binæ chordæ Pp, $P'p'$, & centrum C jaceat in prima ad

F. 165 partes majoris, in reliquis ad partes minoris, ac

166 ſi inter utramque jaceret res eſſet prorſus eadem,

167 dummodo in illa eſſet majori propius, in hac minori, ut illa Ellipſeos caſum referat, hæc Hyperbolæ binos caſus, in quarum priore chordæ datæ ſint ordinatæ ad diametrum primariam, in poſteriore ad ſecundariam. Sectis bifariam ipſis chordis in R, R' habebitur directio diametri Vu eas habentis pro ſuis ordinatis, ignotis adhuc ejus verticibus, & ducta per centrum C recta iis parallela, ea exhibebit poſitionem diametri Bb ejus conjugatæ, cujus pariter vertices B, b adhuc ignorantur. Ducta vero per P recta parallela RR', quæ occurrat $P'p'$ in I, Bb in H, ſi ſumatur in ea HA æqualis, & contraria HP, patet PA fore ordinatam diametro Bb, & proinde A ad Sectionem Conicam. Debebit autem eſſe (n. 299) re-

rectangulum datum P'Ip' ad rectangulum datum PIA in fig. 165, 166, ut rectangulum PRp, ſive quadratum PR datum, ad rectangulum VRu, ſive ad differentiam quadratorum CR, CV, & in fig. 167 ut rectangulum BHb, ſive differentia quadratorum CH, CB ad quadratum HP, ſive CR datum. Dabitur igitur utrobique ea quadratorum differentia, & data præterea CR in fig. 165, 166, ac CH in fig. 167, dabitur ibi CV, & Cu, hic CB, & Cb.

446. Conſtructio autem erit hujuſmodi. Capta in fig. 165 media proportionali inter P'I, Ip', tum inter AI, IP inveniatur quarta poſt ipſas, & PR, cui æqualis ad angulos rectos cum CR erigatur RQ, & centro C intervallo CQ, invenientur puncta V, u. Erit enim quadratum primæ mediæ ad quadratum ſecundæ, ſive rectangulum P'Ip' ad rectangulum AIP, ut quadratum PR ad quadratum RQ, quod proinde debebit eſſe æquale differentiæ quadratorum CR, CV exiſtente CV majore, & erit, cum ſit differentia quadratorum CR, CQ.

447. In fig. 166 inventa eodem pacto quarta illa, erigatur CQ ex C ipſi æqualis, & ad angulos rectos eidem CR, tum centro Q intervallo CR inveniantur vertices V, u, & demonſtratio erit eadem. Sed ſi CQ evaſerit æqualis CR, puncta V, u abibunt in C, evaneſcet diameter Vu, & Hyperbola abibit in rectam lineam, ut num. 110. Erit enim eo caſu P'Ip' differentia quadratorum P'R', R'I, ſive P'R', PR ad rectangulum PIA, ſive differentiam quadratorum HI, HP, vel CR', CR

CR, ut quadratum PR ad quadratum CR; adeoque additis proportionalibus etiam quadratum PR ad quadratum CR, ut quadratum P′R′, ad quadratum CR′, adeoque ſi ducerentur CP, CP′, angulus ad C in triangulis R′CP′, RCP eſſet idem, & puncta C, P, P′ in directum.

448. Quod ſi quarta illa proportionalis obvenerit major quam CR in fig. 166, centro Q intervallo CR non poterunt inveniri puncta V, *u*, & tum caſus pertinebit ad fig. 167, & V*u* non erit diameter primaria, ſed ſecundaria. Nimirum factis ut media inter PI, IA ad mediam inter P′I, I*p*′, ita HP, ſive CR ad quartum, debebit obvenire recta minor, quam CH, ſive PR, cum nimirum recta major, quam CR habuerit in priore caſu ad PR eam rationem, quam media inter PI, IA ad mediam inter P′I, I*p*′. Erecta igitur CQ perpendiculari ad HC æquali quartæ inventæ, centro Q, intervallo CH, vel RP determinabuntur vertices B, *b* diametri primariæ conjugatæ ipſius V*u*, cum debeat quadratum illius quartæ æquari differentiæ quadratorum CH, CB.

449. Inventa autem diametro primaria V*u* in fig. 165, 166, & B*b* in fig. 167, admodum facile invenitur diameter ejus conjugata. In illis enim ſumenda erit CB ad CV, ut PR ad mediam inter VR, R*u*, in hac CV ad CB, ut HP ad mediam inter BH, H*b*; cum nimirum (num. 351) quadratum ſemidiametri conjugatæ ſit ad quadratum ſemidiametri primariæ, ut quadratum ſemiordinatæ ad ad rectangulum ſub abſciſſis.

450. In

450. In Parabola autem in fig. 168 ducta PI parallela RR', ſi capiatur media inter P'I, Ip', tum tertia poſt ipſam, & PR, erit illa media ad hanc tertiam, ut PI ad R'V ſumendam in directum cum RR' ad partem ordinatæ minoris. Erit enim PI ad R'V, ut quadratum illius mediæ, ſive rectangulum P'Ip' ad quadratum PR, ſeu rectangulum PRp ut debet eſſe per num.361. F.168

451. Datis autem binis diametris conjugatis, & centro, determinatur Ellipſis, vel Hyperbola (num. 436, 438), & dato vertice, ac directione diametri, & una quavis ordinata, adeoque & latere recto tertio poſt abſciſſam, & ſemiordinatam, ac ordinatarum directione, datur Parabola num.440.

452. *Quod ſi binæ chordæ datæ æquales ſint, Problema erit indeterminatum, vel impoſſibile, prout æqualiter, vel inæqualiter a centro diſtiterint*. In eo caſu punctum I cadet in P, & aſſumpta alia chorda parallela binis illis æqualibus magnitudinis cujuſcumque, per eam, & per alteram e datis determinata Sectione Conica, ea debebit habere pro chorda ſua illam etiam alteram e binis æqualibus datis, quæ ſi a centro æque non diſtiterint Problema impoſſibile erit, cum quævis Sectio Conica debeat habere ordinatas, quæ inæqualiter a centro diſtant, inæquales, & pertinebit caſus ad Ellipſim deſinentem in binas rectas parallelas, ubi axe conjugato manente, & æquali ipſis chordis datis, axis tranſverſus concipiatur excreſcere in infinitum ita, ut ejus vertices jam nuſquam ſint, in quas &

Pa-

Parabola abibit, ſi binæ ejus ordinatæ æquales ſint, vertice V in fig.168 ita in infinitum abeunte, ut nuſquam jam ſit.

453. *Dentur jam* in fig.169, 170 *quinque puncta* A, P, p, B, P', *per quæ oporteat Sectionem Conicam determinare*. Conjungantur bina
F.169 quævis paria punctorum rectis, ut BA, P*p*, quæ ſi
170 fuerint parallelæ, jam definient unius diametri poſitionem (num.443), ſi non fuerint parallelæ concurrent alicubi in Q. Ducta per quintum punctum P' recta alteri ex iis, ut P*p* parallela occurrens alteri, ſi opus eſt productæ in I, fiat ut media inter AQ, QB ad mediam inter QP, Q*p*, ita media inter AI, IB ad quartum. Tum capiatur tertia continue proportionalis poſt P'I & quartum terminum inventum, cui in ipſa recta P'I producta, ſi opus eſt, capiatur æqualis I*p*' ad partes P, vel ad oppoſitas ita, ut ſi punctum Q fuerit vel ſimul intra utramque AB, P*p*, vel ſimul extra utramque, etiam I vel ſit ſimul inter utramque AB, P'*p*', vel ſimul extra utramque, ſi vero illud fuerit intra alteram, & extra alteram, hoc etiam ſit intra alteram ex his, & extra alteram, eritque etiam *p*' ad eandem Sectionem Conicam. Erit enim rectangulum AQB ad rectangulum PQ*p*, ut rectangulum AIB ad rectangulum P'I*p*', ac binæ chordæ P*p*, P'*p*' parallelæ determinabunt unius diametri poſitionem. Eodem modo conjunctis A*p*, PB, & ducta P'*i* parallela A*p* determinabitur *ia*, & alterum par chordarum parallellarum P'*a*, A*p*, ac per ipſas altera diameter. Si binæ diametri fuerint parallelæ;

lelæ, Sectio Conica erit Parabola, & per binas chordas parallelas determinabitur juxta num.450: ſi concurrant alicubi, determinabunt centrum, ac per ipſum, & binas chordas parallelas definietur Ellipſis, vel Hyperbola juxta num.444. Quod ſi forte binæ ordinatæ, ut Pp, $P'p'$ evaſerint æquales, & æqualiter a centro diſtantes, ad earum diametrum ex utrovis reliquorum datorum punctorum A, B ducta recta parallela iis uſque ad diametrum, & producta tantundem, jam habebitur alia chorda inæqualiter a centro diſtans, & Problemati determinando par.

454. In fig.169 punctum Q erat extra utramque Pp, AB, erat I intra AB, aſſumenda fuit Ip' ad partes oppoſitas reſpectu IP', ut I remaneret ſimul intra utramque AB, $P'p'$, & eodem pacto quoniam q fuit inter utramque Ap, BP, & i intra AB, aſſumpta eſt ia ad partes oppoſitas iP'. At in fig.170 erat Q intra Pp, ſed extra BA. Quare cum I fuerit intra AB, aſſumenda fuit Ip' ad partes IP', ut I jaceret extra $P'p'$. Et cum q fuerit intra PB, ſed extra Ap, & i extra BA, aſſumenda fuit contra ia ad partes oppoſitas iP', ut i remaneret intra aP'. Id autem ſemper neceſſario habendum præ oculis. Nam ubi agitur de Ellipſi, & Parabola, ſemper concurſus binarum chordarum habebitur inter utramque, vel extra utramque, prout id punctum jacuerit intra Sectionem Conicam, vel extra. In Hyperbola vero ſi utraque recta vel ſimul inclinetur directrici in angulo majore, quam ſit angulus æqualitatis, vel ſimul in angulo minore, utraque vel F.169 F.170

binos conjunget ramos oppoſitos, vel ejuſdem rami puncta, & concurſus utriuſque in primo caſu habebitur intra utramque chordam, ſi id punctum jacuerit inter utrumque ramum, habebitur vero extra, ſi jacuerit intra utrumvis ramum; in ſecundo vero caſu habebitur intra utramque, ſi jaceat intra eum ramum, extra utramque, ſi extra eum jaceat. At ſi altera inclinetur in angulo majore, altera in minore; illa conjunget utrumque ramum, hæc ejuſdem rami bina puncta, quo caſu concurſus neceſſario jacebit ſemper intra alteram, & extra alteram. Quare generaliter hoc verum erit *in binis paribus chordarum, quarum priores binæ poſterioribus binis ſunt parallelæ, debere utrumque concurſum, vel ſimul eſſe intra utramque, vel ſimul extra utramque, vel ſimul intra alteram, & extra alteram, qui poſtremus caſus ſolum habebitur in Hyperbola, ubi altera chorda debeat conjungere binos ramos oppoſitos, altera bina puncta ejuſdem rami.*

455. Infinitum eſſet perſequi omnes caſus, in quibus conſtructio rectas lineas pro Sectionibus Conicis exhibebit. Verum id generaliter licebit etiam ante conſtructionem deprehendere. Sectio enim Conica nonniſi in unam rectam, vel duas abire poteſt. Quamobrem niſi ſaltem tria puncta in directum jaceant, in rectas non incidetur, quæ ſi jacuerint in directum, rectæ lineæ omnino habebuntur. Pariter ſi pro binis punctis detur tangens cum ipſo contactu, res eodem redibit, conſiderato puncto dato pro duplici, ut ſi pun-

ſi puncta P, *p* coirent, & recta QP*p* abiret in tangentem; ac iccirco ſi detur tangens cum contactu, & tria puncta præterea, vel dentur binæ tangentes cum binis contactibus, & aliud punctum, eodem pariter res rediret: ſed iſta, & alia ejuſmodi perſequi, ut ubi dantur tangentes ſine contactu, infinitum eſſet, quorum nonnullos caſus Newtonus elegantiſſime ſolvit principiorum lib. I.

456. Illud unum ſatis erit inferre, quod ſupra innuimus, *Sectionem Conicam alteri Sectioni Conicæ non poſſe occurrere, niſi in quatuor punctis*. Si enim quinque puncta congruant, congruit jam tota Conica Sectio cum tota. Porro ſi binæ interſectiones coeant habetur contactus, ſi tertia iis accedat habetur contactus arctior extra vertices axium, qui, ut infra patebit, fiet id, quod oſculum dicimus: ubi autem omnes concurrunt in unicum punctum, evadit oſculum adhuc arctius in axium verticibus. Sed hæc non ſunt hujus loci, & poſt excurſum fuſiorem ad ſolutionem Problematum pertinentium ad determinationem Sectionum Conicarum ex quibuſdam datis, regrediemur ad ſeriem Corollariorum interruptam numero 435, perſequentes ea, quæ pertinent ad normalem, ac perpendiculum e centro in tangentem adjecta reliquis ante conſideratis.

Coroll. 14.

457. *Rectangulum ſub binis normalibus* PM, Pm *in fig.* 171, 172 *ad quodvis punctum* P *pertinentibus, ac terminatis ad binos axes æquatur tam* F. 171 172. *rectangulo* HPQ *ſub binis ſegmentis* QH *tangentis*

N per

per idem punctum P *ductæ, & terminatæ ad binos axes* Vu, Dd, *quam quadrato ſemidiametri* CI *parallelæ ipſi tangenti, & conjugatæ diametri tranſeuntis per idem punctum* P.

458. Sunt enim ſimilia bina triangula rectangula MPQ, *m*PH, cum ob angulum ad Q in fig. 171 communem triangulis rectangulis MPQ, HCQ, & in fig. 172 angulos ad verticem Q oppoſitos æquales ſit ipſum MPQ ſimile HCQ, ac ob angulum ad H communem ſit eidem HCQ ſimile *m*PH. Quare erit MP ad PQ, ut PH ad P*m*, & rectangulum ſub MP, & P*m* æquale rectangulo ſub HP, & PQ, adeoque etiam (num. 433) quadrato CI.

Coroll. 15.

459. *Rectangulum ſub perpendiculo* CL *ducto e centro in tangentem, ac normali* PM, *vel* Pm *ad alterum axem* Vu, *vel* Dd *terminata æquatur quadrato ſemiaxis alterius* CD, *vel* CV, *& binæ normales inter ſe ſunt in ratione reciproca duplicata axium, ad quos terminantur, perpendicula vero e centro in tangentem, mutato utcumque puncto contactus, in ratione reciproca normalis utriuslibet.*

460. Ductis enim ſemiordinatis PR, PE ad axes V*u*, D*d*, erunt ſimilia triangula rectangula CLH, PRM ob angulos ad C, & P a parallelis contentos æquales, & pariter ſimilia CLQ, P*m*E. Erit igitur CL ad CH, ut PR ad PM, adeoque rectangulum ſub CL, & PM æquale rectangulo ſub CH, & PR, ſive (num. 419) quadrato ſemiaxis conjugati CD, ac pariter CL ad CQ, ut PE ad *m*P, adeoque rectangulum ſub CL, & *m*P æquale rectangulo ſub

CQ

CQ, & PE ; ſive (num. 419) quadrato ſemiaxis CV.

461. Hinc autem ob CL utrique rectangulo communem, erunt PM, P*m*, ut quadrata CD, CV, ob magnitudinem vero conſtantem rectanguli ſub CL, & utravis normali, ipſum perpendiculum CL augebitur, vel minuetur in eadem ratione, in qua contra minuetur, vel augebitur normalis ipſa.

Coroll. 16.

462. *Subnormalis ad abſciſſam a centro in utrovis axe eſt, ut quadratum alterius axis ad quadratum ipſius, & in axe tranſverſo abſciſſa eſt ad diſtantiam occurſus normalis cum axe ipſo a centro, ut quadratum ſemiaxis tranſverſi ad quadratum diſtantiæ foci utriuslibet a centro.*

463. Eſt enim in iiſdem triangulis tam ſubnormalis MR ad PE, ſive RC, quam PR ad ſubnormalem E*m*, ut PM ad P*m*, ſive (num.459.) ut quadratum ſemiaxis CD ad quadratum ſemiaxis CV. Hinc autem erit CR ad CM differentiam in Ellipſi, ſummam in Hyperbola ipſarum CR, RM, ut quadratum ſemiaxis tranſverſi ad quadratum diſtantiæ foci a centro, quod (num.64) in Ellipſi æquatur differentiæ, in Hyperbola ſummæ quadratorum ſemiaxium.

Coroll. 17.

464. *Si per verticem axis* V *in fig.* 173, 174, 175, 176, *ducatur recta* VO *perpendicularis* F. 173
axi, & æqualis dimidio lateri recto ipſius axis, 174
tum CO *in Ellipſi in fig.* 173, *ac in Hy-* 175
perbola in fig. 174, 175 *per centrum, & in* 176

 Pa-

*Parabola in fig.*176 OI *parallela axi, occurrens ordinatæ* RP *in* D, *erit* RD *æqualis ſubornali* RM.

465. Erit enim in Ellipſi, & Hyperbola RD ad abſciſſam CR, ut dimidium latus rectum VO ad ſemiaxem CV, nimirum ut quadratum alterius axis ad quadratum axis *Vu*, ſive (num.462), ut RM ad ipſam RC. In Parabola vero in fig.176 erit RD æqualis dimidio lateri recto VO, adeoque (num.200) ſubnormali RM.

Coroll. 18.

466. *Rectangulum ſub ſemidiametro* CI *conjugata ſemidiametri* CP *in fig.*171, 172, *& perpendiculo,*
F.171 172 *vel* PO *e vertice* P *diametri ejus conjugatæ demiſſo in ipſam, vel* CL *e centro* C *in tangentem per* P *ductam æquatur rectangulo ſub ſemiaxibus, & ſemidiametri, vel diametri omnes ſunt in ratione reciproca ejuſmodi perpendiculorum.*

467. Eſt enim tam quadratum CL ad rectangulum ſub CL, & PM, quam rectangulum ſub CL, & P*m* ad rectangulum ſub PM, & P*m*, ut CL ad PM, ob CL communem in utroque termino primæ rationis, & P*m* in utroque ſecundæ. Quare cum & (num.459) rectangulum ſub CL, & PM æquetur quadrato ſemiaxis CD, rectangulum vero ſub CL, & P*m* quadrato ſemiaxis CV; rectangulum ſub PM, & P*m* (num.457) quadrato CI, erit quadratum CL ad quadratum CD, ut quadratum CV ad quadratum CI, adeoque CL ad CD, ut CV ad CI, & rectangulum ſub CL, & CI, vel ſub CI, & PO æquali ipſi CL in parallelogrammo CLPO æquale rectangulo ſub ſemiaxibus CD, CV.

468. Por-

468. Porro cum rectangulum ſub eo perpendiculo, & CI conſtanter æquetur eidem rectangulo ſub ſemiaxibus, mutato ipſo perpendiculo, mutabitur CI in ratione ejus reciproca.

SCHOLIUM VI.

469. Poſſet hic jam admodum facile communi demonſtratione pro Ellipſi, & Hyperbola erui, illud parallelogrammum circumſcriptum Ellipſi, vel inſcriptum quatuor ramis Hyperbolarum conjugatarum, quod continetur rectis ductis per vertices alterius e diametris conjugatis parallelis alteri, æquari rectangulo ſub binis axibus, quod pro Hyperbola demonſtravi num. 244; pro Ellipſi num. 375. Nam parallelogrammum, quod poteſt continere ſemidiameter CI cum ſemidiametro CP in ſuo angulo, eſſet ejus pars quarta, & æquatur rectangulo ſub baſi CI, & altitudine CL, nimirum rectangulo ſub ſemiaxibus. Sed ad alia pergendum nondum eruta.

Coroll. 19.

470. *Quævis ſemidiameter eſt ad normalem ductam per verticem ejus conjugatæ, & terminatam ad alterum axem, ut is ſemiaxis, vel axis ad alterum, & omnes ſemidiametri ſunt, ut ejuſmodi normales.*

471. Eſt enim IC ad PM, vel P*m*, ut rectangulum ſub IC, & CL, ſive (num.466) ſub CD, CV ad rectangulum ſub CL, & PM, vel P*m*, nimirum (num.459) ad quadratum CD, vel CV, adeoque ut CV ad CD, vel ut CD ad CV. Cumque

que ea ratio ſit conſtans, mutabuntur eodem pacto ipſæ CI, PM, Pm.

SCHOLIUM VII.

472. HUC uſque perſequuti ſumus præcipuas proprietates, quæ ex illa harmonica tangentis proportione profluunt, conſiderando prius ejus unius conſectaria, tum introducendo conſiderationem centri, & diametrorum conjugatarum, ac deinde normales ad curvam, & perpendiculum e centro in tangentem. Nunc etiam focos inducemus, quorum relationem ad tangentem vidimus num. 181, cum nimirum radii foci ad contactum ducti debeant cum ipſa tangente continere angulos æquales, adeoque & cum normali, & aliam ibidem habuimus proportionem harmonicam (num. 189) definitam a tangente, normali, & binis focis. Quo tamen plures aſſumuntur termini comparandi, eo plures etiam combinationes proveniunt, quibus animus defatigatur, atque obruitur. Quamobrem multis omiſſis, quas perſequi infinitum eſſet, præcipuas tantummodo delibabimus.

Coroll. 20.

473. *Diameter* Mm *in fig.* 177, 178, 179 *eſt*
F.177 *media proportionalis inter chordam* Pp *ductam*
178 *per focum, & axem tranſverſum.*
179 474. Si enim ipſi Mm occurrat tangens per P ducta in A, & ſemiordinata in D, ac ordinatam Pp ſua diameter ipſi PD parallela ſecet in I, erit (num. 194) CA æqualis ſemiaxi tranſverſo CV;

ob

ob ſuum paralleliſmum cum FP ducta per focum, PI vero dimidia Pp erit æqualis CD. Cum igitur (num.411, & 415) ſit CM media inter CA, CD, erit tota Mm media inter Vu duplam CA, & Pp.

Coroll.21.

475. *Si in fig.* 180, 181 *in Ellipſi, & Hyperbola ex occurſu* M *normalis terminatæ ad axem transverſum* Vu *cum axe ipſo, ducatur perpendiculum* MT *in rectam e foco* F *ductam ad punctum* P *perimetri, ex quo normalis ducitur, id in ipſa ab eodem puncto abſcindet ſegmentum* PT *æquale dimidio lateri recto principali, quod & in Parabola locum habet.* F.180 181

476. Ducta enim per C diametro I*i* parallela tangenti PQ, ea a recta PF abſcindet (num.194) ſegmentum PD æquale ſemiaxi transverſo; & in normali PM ſegmentum PO æquale perpendiculo CL ex centro C ducto in tangentem PQ, eritque (num. 459) rectangulum OPM æquale quadrato ſemiaxis conjugati. Erunt autem ſimilia triangula rectangula PTM, POD, adeoque erit PD ad PO, ut PM ad PT, & rectangulum ſub PT, & PD ſemiaxe transverſo æquale rectangulo ſub PM, & PO, ſive quadrato ſemiaxis conjugati, nimirum PT tertia poſt ſemiaxem transverſum, & conjugatum, ſive æqualis dimidio lateri recto principali. In Parabola vero in fig.176 ducta MT perpendiculari ad PF æqualia erunt triangula rectangula PTM, MRP, cum ob latera FP, FM æqualia (num.200) ſint æquales anguli FPM, FMP, & PM communis. Quare erit PT æqualis ſubnor- F.176

mali RM, ſive (num.200) dimidio lateri recto principali.

Coroll.22.

477. *Dimidium latus rectum principale ad normalem axi tranſverſo eſt, ut perpendiculum e centro in tangentem ad ſemiaxem ipſum tranſverſum.*

478. Eſt enim fig.180, 181 PT ad PM, ut PD æqualis ſemiaxi tranſverſo ad PO æqualem perpen-
F.180 dículo CL. Poterat etiam deduci ex num.459, ex
181 quo rectangulum ſub PM, & CL æquatur quadrato ſemiaxis conjugati, ſive (n.71, vel 351) rectangulo ſub dimidio latere recto principali, & ſemiaxe tranſverſo.

Coroll. 23.

479. *Differentia quadratorum normalis ad axem tranſverſum terminatæ, & dimidii lateris recti principalis æquatur in Parabola quadrato ſemiordinatæ ipſius axis; eſt in Ellipſi, & Hyperbola ad ipſum, ut quadratum diſtantiæ focorum ad quadratum axis tranſverſi, ſive ut differentia in Ellipſi, ſumma in Hyperbola quadratorum ſemiaxis tranſverſi, & conjugati ad quadratum ſemiaxis conjugati, ſive ut differentia in Ellipſi, ſumma in Hyperbola totius, vel dimidii lateris recti principalis, & totius, vel dimidii axis tranſverſi ad totum, vel dimidium axem tranſverſum, quæ rationes omnes eædem ſunt.*

480. Patet in Parabola in fig.176, cum in
F.176 triangulis illis PTM, PRM æqualibus, etiam MT
180 debeat æquari PR, ac ob angulum ad T rectum
181 ejus quadratum differentiæ quadratorum normalis

lis PM, & dimidii lateris recti PT, quod immediate patet in triangulo rectangulo PRM, in quo PM normalis, RM æqualis dimidio lateri recto, PR ſemiordinatæ. Pro Ellipſi & Hyperbola ſic demonſtratur in fig. 180, 181. Ducta P*f* ad alterum focum, & ſemiordinata PR, ſimilia erunt triangula rectangula FMT, FPR ob angulum ad F communem. Quare erit PR ad MT, ut FP ad FM, adeoque etiam (num. 192) ut *f*P ad *f*M, nimirum ut ſumma in Ellipſi, differentia in Hyperbola ipſarum FP, *f*P, ſive utrobique axis tranſverſus ad ſummam in Ellipſi, differentiam in Hyperbola rectarum FM, *f*M, ſive utrobique ad diſtantiam focorum F*f*. Adeoque quadratum ſemiordinatæ PR ad quadratum MT, ſive differentiam quadratorum normalis PM, & dimidii lateris recti PT, ut quadratum axis tranſverſi ad quadratum diſtantiæ focorum, vel ſumendo dimidiorum quadrata, ut quadratum ſemiaxis tranſverſi ad quadratum diſtantiæ foci a centro; nimirum (n. 64) ad differentiam in Ellipſi, ſummam in Hyperbola quadratorum ſemiaxis tranſverſi, & conjugati; cumque ſit (n. 66) quadratum ſemiaxis tranſverſi ad quadratum coniugati, ut axis, vel ſemiaxis tranſverſus ad totum, vel dimidium latus rectum; eadem illa ratio erit differentiæ totius, vel dimidii axis tranſverſi, & totius, vel dimidii lateris recti in Ellipſi, ſummæ in Hyperbola ad totum, vel dimidium axem tranſverſum.

Coroll. 24.

481. *Differentia in fig.* 182 *in Ellipſi, binarum* PF, Pf *ductarum a quovis puncto* P *ad binos*

F.182 *nos focos, & ſumma in fig.183 in Hyperbola ad* 183 CR *abſciſſam a centro in axe tranſverſo eſt conſtanter, ut diſtantia focorum* Ff *ad ſemiaxem tranſverſum* CV.

482. Si enim recta P*f* occurrat in B, & D rectis FB, CD ductis e foco F, & centro C parallelis tangenti QP, erit PD (num.194) æqualis ſemiaxi tranſverſo VC, & ob angulos PFB, PBF æquales iis, qui fiunt in P cum tangente, adeoque (num.181) æquales inter ſe, erit PB æqualis PF, & *f*B in Ellipſi differentiæ, in Hyperbola ſummæ binarum P*f*, PF, quæ ob *f*F duplam FC, ſive *f*C, erit dupla *f*D. Erit autem ſumma illa, vel differentia ad *f*F diſtantiam focorum, ut *f*D ad *f*C, ut DP, ſive CV ad CQ, nimirum (num.411) ut CR ad CV, & alternando *f*B ad CR, ut *f*F ad CV.

Coroll.25.

483. *Rectangulum ſub binis rectis* PF, P*f* *in fig.184, 185 ductis a quovis puncto* P *ad bi-* F.184 *nos focos æquatur quadrato ſemidiametri conju-* 185 *gatæ ejus, quæ tendit ad* P, *rectangulo ſub binis normalibus terminatis ad binos axes, ac rectangulo ſub ſegmentis tangentis interceptis inter contactus, & binos axes; & ipſius rectanguli* FPf, *ac quadrati ipſius* CP *ſumma in Ellipſi, differentia in Hyperbola æquatur ibi ſummæ, hic differentiæ quadratorum ſemiaxium.*

484. Concipiatur enim circulus circumſcriptus triangulo FP*f*, qui occurrat axi conjugato in *m*, & N, poſito N in arcu FP*f* in fig.184 in oppo-

oppoſito in fig. 185, ducaturque Pm occurrens axi tranſverſo Vu in M, & NP ſecans axem uV in Q, ac recta Fm. Ob rectam Ff ſectam bifariam, & ad angulos rectos in C a diametro Nm; arcus FNf, Fmf ſecabuntur bifariam in N, m. Quare tam recta Pm in fig. 184, quam PN in fig. 185 ſecabit bifariam angulum FPf, cum anguli inſiſtentes æqualibus arcubus Fm, fm in fig. 184, FN, fN in fig. 185 æquales eſſe debeant; recta vero PN erit ipſi Pm perpendicularis ob angulum mPN rectum in ſemicirculo. Erit igitur utrobique (num. 181) Pm normalis, PN tangens. Angulus autem FmP, erit æqualis angulo MfP, cum uterque inſiſtat eidem arcui FP, adeoque ob angulos ad P æquales in triangulis FPm, MPf, erunt ſimilia ea triangula, & FP ad Pm, ut PM ad Pf, ac rectangulum FPf æquale rectangulo MPm, adeoque (num. 457) tum quadrato ſemidiametri conjugatæ ejus, quæ tendit ad P, tum rectangulo NPQ. Cumque ſumma in Ellipſi (num. 375, 248), differentia in Hyperbola quadratorum ſemidiametrorum conjugatarum æquetur ibi ſummæ, hic differentiæ quadratorum ſemiaxium, æquabitur eidem ibi ſumma, hic differentia rectanguli FPf, & quadrati PC.

Coroll. 26.

485. *Rectangulum* FMf *ſub binis diſtantiis concurſus normalis cum axe tranſverſo a binis focis æquatur in Ellipſi differentiæ, in Hyperbola ſummæ quadrati normalis* PM *ad ipſum terminatæ, & quadrati ſemidiametri conjugatæ ejus, quæ terminatur ad* P, *vel rectanguli* FPf *bina-*

rum

rum ductarum ab binos focos , & rectangulum FQf *ſub binis diſtantiis concurſus tangentis a binis focis æquatur in Ellipſi ſummæ , in Hyperbola differentiæ quadrati tangentis* PQ *terminatæ ad axem tranſverſum , & quadrati ejuſdem illius ſemidiametri conjugatæ , vel rectanguli* FPf.

486. Nam ex circuli natura rectangulum FMf æquatur rectangulo *m*MP, & rectangulum FQf rectangulo PQN. Porro rectangulum ſub M*m*, & MP, addito quadrato MP in fig. 184, & ablato in fig. 185, evadit rectangulum ſub *m*P, & PM, ſive quadratum illius ſemidiametri conjugatæ, vel rectangulum FPf, & rectangulum ſub PQ, & QN, ablato in fig. 184 quadrato PQ, & addito in fig. 185, evadit rectangulum ſub PQ, & PN, ſive illud idem quadratum ſemidiametri conjugatæ, vel rectangulum FPf.

Coroll.27.

487. *Si e binis focis* F, f *in Ellipſi in fig.63,*
F.63 *& Hyperbola in fig.64 ducantur in tangentem* PT
64 *bina perpendicula* FA, fa *eorum rectangulum æquabitur quadrato ſemiaxis conjugati.*

488. Erit enim (num. 192) FA ad normalem IP, ut perpendiculum CL e centro in tangentem ad *fa*; ac proinde rectangulum ſub FA, & *fa* æquabitur rectangulo ſub IP, & CL, ſive (n. 459) quadrato ſemiaxis conjugati.

Coroll.28.

489. *Radius ad ſinum anguli, quem recta e foco ducta ad contactum continet cum tangente, eſt in Ellipſi, & Hyperbola, ut ſemidiameter paral-*

rallela tangenti ad ſemiaxem conjugatum, & is angulus in Ellipſi a recto maxime in ipſius axis conjugati verticibus diſtat, angulo quem binæ rectæ inde ad focum ductæ continent ibi exiſtente maximo: tum illius differentia a recto, quæ æquatur duplo hujus, eo magis minuitur, quo punctum contactus ad verticem propiorem axis tranſverſi accedit magis: in Hyperbola is angulus eo magis recedit a recto, & illa, quem eæ binæ rectæ continent, eo magis minuitur, quo contactus magis diſtat a vertice axis tranſverſi.

490. Nam ob angulos FPA, *fPa* utrobique æquales (num.181) eſt FP ad FA, ut *f*P ad *fa* in eadem ratione, ac proinde quadratum FP ad quadratum FA, ut rectangulum FP*f*, ſive (n.483) quadratum ſemidiametri parallelæ tangenti PT ad rectangulum ſub FA, & *fa*, ſive (num.487) quadratum ſemiaxis conjugati; ac proinde FP ad FA, ſive radius ad ſinum anguli FPA, ut illa ipſa ſemidiameter ad eum ſemiaxem.

491. Quamobrem is ſinus eo erit minor, & angulus proinde eo magis recedet a recto, quo ea ſemidiameter major erit. Porro ea ſemidiameter in Ellipſi eo eſt major, quo ejus conjugata CP eſt minor, cum ſumma quadratorum utriuſque ſit (num.375) conſtanter æqualis ſummæ quadratorum ſemiaxium, & CP eo eſt minor (num.379), quo magis P accedit ad vertices axis conjugati, & recedit a vertice propiore axis tranſverſi. Quare angulus FPA eo magis recedit a recto, quo magis P accedit ad verticem axis conjugati, ubi maxime a recto recedit.

Cum-

Cumque ejus differentia a recto API ſit angulus FPI, & FPf ſit duplus ipſius FPI; ipſe angulus FPf erit maximus puncto P congruente cum ſemiaxis conjugati vertice, & eo major erit, quo magis P ad eum verticem accedet, & recedet a vertice ſibi propiore axis tranſverſi.

492. At in Hyperbola in fig.64 cum diameter CP in receſſu a vertice axis conjugati perpetuo creſcat (num.246), & differentia quadratorum ſemidiametrorum conjugatarum ſit conſtanter eadem, etiam ſemidiameter conjugata perpetuo augebitur, adeoque perpetuo recedet a recto angulus FPA, & minuetur tam ipſe, quam FPf ejus duplus.

SCHOLIUM VIII.

493. POſtrema hæc Corollaria, quæ ad focum pertinent, licet non profluxerint immediate ab ipſa Propoſitione hac 8, tamen profluxerunt a Corollariis ex ea deductis combinatis cum iis, quæ antea fuerant eruta, quam ob cauſſam hinc divellenda non fuerant. Poſtremum hoc determinat anguli, quem foci radius cum tangente continet, magnitudinem, ac incrementa, & decrementa pro Ellipſi, & Hyperbola. Pro Parabola idem deduci facile poteſt e num.198, Eſt nimirum radius ad ſinum anguli FPA in fig.65, ut FP ad FA, ſive ob FP, FA, FM continue proportionales, & FP æqualem (num.351)
F.65 quartæ parti lateris recti pertinentis ad diametrum tranſeuntem per P, erit radius ad eum ſinum

num in ratione ſubduplicata diſtantiæ contactus a foco ad quartam partem lateris recti principalis, ſive in ſubduplicata ratione lateris recti diametri ductæ per contactum ad latus rectum principale, & quoniam in receſſu puncti P a vertice axis tranſverſi ſemper augetur (num. 58) diſtantia FP, ſemper angulus rectæ FP cum tangente magis recedet a recto.

494. Iam vero progrediar ad aliam proprietatem Sectionum Conicarum, quæ ipſis nomen dedit, & quæ ita pariter a ſexta Propoſitione profluit, ut ſit merus particularis caſus Theorematis demonſtrati (num. 319). Verum hic iterum demonſtratur ope Prop. 7, & ſternet nobis viam ad definiendos circulos oſculatores Sectionum Conicarum per finitam Geometriam, qui nimirum ita ad arcum Sectionis Conicæ accedant, ut quemadmodum inter arcum circuli, & rectam tangentem nulla alia recta duci poſſit, licet infiniti numero circulares arcus poſſint duci, ita inter arcum Sectionis Conicæ, & arcum ejus circuli oſculatoris, nullus alius circularis arcus tranſire poſſit, licet in unico puncto ſe contingant, & infiniti numero arcus Sectionum Conicarum poſſint interſeri, quæ generalis eſt proprietas pro circulis oſculatoribus curvarum quarumcumque. Sed aggrediamur rem ipſam.

PRO-

PROPOSITIO IX. THEOREMA.

495. *Si per verticem* V *diametri cujuſvis in Ellipſi in fig.* 186, *& Parabola in fig.* 187, *ac cujuſvis diametri primariæ Hyperbolæ in*
F. 186 *fig.* 188 *ducatur tangens* VA *æqualis lateri recto*
187 *ipſius, & per* A *recta tranſiens per alterum ver-*
188 *ticem* u *in Ellipſi, ac Hyperbola, ac parallela axi in Parabola, quæ ordinatæ* PRp *occurrat in* L, *erit quadratum ſemiordinatæ* RP *æquale rectangulo ſub abſciſſa* VR, *& intercepta* RL *inter diametrum, ac rectam ductam per* A, *quæ intercepta erit quarta proportionalis poſt latus tranſverſum, rectum, & abſciſſam ab altero vertice, cui latus rectum non applicatur. Idem vero quadratum, & rectangulum in Parabola æquabitur rectangulo ſub illa abſciſſa* VR, *& latere recto; in Ellipſi ab eodem deficiet; in eo Hyperbolæ ramo, cui latus rectum eſt applicatum, excedet ipſum per rectangulum ſub ipſa abſciſſa, & quarta proportionali poſt latus tranſverſum, rectum, & ipſam abſciſſam.*

496. Eſt enim (num. 351) quadratum PR in Parabola in fig. 187 æquale rectangulo ſub abſciſſa VR, & latere recto VA, adeoque ſub VR, & RL. At in Ellipſi, ac Hyperbola eſt ipſum quadratum PR ad rectangulum VR*u*, ut latus rectum AV ad tranſverſum V*u*, ſive ut LR ad R*u*, vel aſſumpta VR communi, ut rectangulum ſub VR, & RL ad idem rectangulum VR*u*. Quare quadratum ipſum RP æquale erit rectangulo ſub VR, & RL. 497. Pa-

497. Patet autem in Parabola RL æquari lateri recto VA, in Ellipſi eſſe minorem ipſo VA, in Hyperbola majorem; & ſi in his ducatur VO uſque ad Pp parallela AL, cui & æqualis erit, & abſcindet OL æqualem lateri recto VA, erit Vu ad VA, ut VR ad RO, ac proinde ipſa RO quarta poſt latus tranſverſum Vu, rectum VA, & abſciſſam VR, ac rectangulum ſub VR, & RL a rectangulo ſub VR, & OL, vel VA deficiet in Ellipſi, ipſum excedet in Hyperbola per rectangulum ſub VR, & OR. Q. E. D.

SCHOLIUM I.

498. CUM quadratum ſemiordinatæ rectangulo illi ſub abſciſſa, & latere recto æquetur in Parabola, deficiat ab eo in Ellipſi, redundet in Hyperbola, hinc Parabolæ, Ellipſi, Hyperbolæ nomen datum a Veteribus, quod Græco ſermone æqualitatem, defectum, & redundantiam menſuræ exprimit. Sed in noſtra definitione, ut num. 12 notavimus, habentur ſtatim æqualitas quædam alia, defectus, & exceſſus rationis illius determinantis.

499. Porro hic recta AL data idem prorſus F.115
præſtat pro Ellipſi, & Hyperbola, quod num.319 116
in fig.115, 116 illa BD, quæ ibi etiam tranſit per *u*, & ſi ipſum V congruat ibi cum contactu I, & chorda V*u* evadat diameter, illæ figuræ abibunt in has ita, ut ibi puncta D, L fiant eadem, quæ hic L, R; ordinata vero Pp ſecabitur in R

biſariam, ac rectangulum illud PDp æquale rectangulo ſub VL, & DL evadet hìc ipſum quadratum ſemiordinatæ RP æquale rectangulo ſub VR, & RL.

500. Sed jam ex hac Propoſitione comparata cum num. 464 eruam Corollarium non inutile, & ſponte fluens, quod ad ſubnormalem pertinet, tum ad oſculatores circulos faciemus gradum.

Coroll. 1.

501. *Subnormalis in axe tranſverſo deficit per dimidium lateris recti principalis in Parabola ab ipſo latere recto principali, in Ellipſi & Hyperbola a quarta proportionali poſt latus tranſverſum, rectum, & abſciſſam a vertice axis remotiore, ſive ab illa recta, cum qua continet abſciſſa rectangulum æquale quadrato ſemiordinatæ.*

502. Nam in fig. 173, 174, 176 ſi capiatur VA dupla VO, adeoque æqualis lateri recto principali, tum recta ex A parallela axi Vu in Parabola in fig. 176, tendens ad u in reliquis, & occurrens ordinatæ PR in L, ſubnormalis RM, quæ æquatur RD (num. 464), deficiet ab RL, quæ eſt illa ipſa recta enunciata in hac Prop. 9, & in hoc Coroll. 1, per DL æqualem AO dimidio lateri recto principali VA.

F. 173 174 176

Coroll. 2.

503. *Circulus qui communem in aliquo puncto tangentem habet cum Conicæ Sectionis perimetro, & e diametro per id punctum tranſeunte abſcindit chordam æqualem lateri recto ejus diametri, ma-*

maxime omnium accedit ad arcum Sectionis ipſius ita, ut nullius alterius circuli arcus inter arcus ipſorum tranſire poſſit, ſed cujuſcumque majoris arcus aliquis continuus utrinque a contactu extra utrumque cadat inter ipſos & tangentem, cujuſcumque minoris a tangente recedat magis, quam uterlibet ex iis, & jaceat ex parte ipſorum cava; quem circulum oſculatorem voco.

504. Manentibus enim in fig. 189, 190, 191 punctis V, R, *u*, A, L, O, ut in Propoſitione in fig. 186, 187, 188 (perimeter autem Sectionis Conicæ non ducitur vitandæ confuſionis gratia) eadem recta VA, quæ Sectionem Conicam contingit in V, tangat ibidem & circulum MV*m*, qui a diametro abſcindat chordam aliquam VH, ac rectæ LR parallelæ tangenti occurrat in M, *m*; ipſi vero tangenti VA occurrat tangens HT ducta per H in T, & rectæ MN, *mn* parallelæ tangenti HT occurrant rectæ VH in N, *n*. F. 189 190 191

505. In primis erit quadratum MR æquale rectangulo ſub VR, & NH, ac quadratum *m*R rectangulo ſub VR, & *n*H. Nam in fig. 189 ob MN, MR parallelas tangentibus TH, TV, anguli MRN, MNR æquantur angulis THV, TVH æqualibus, cum eos ſingulos menſuret dimidius arcus VH, adeoque & ipſi æquales erunt, & æquales MRV, MNH eorum complementa ad binos rectos, ac rectæ MN, MR æquales. Quare cum etiam angulus VMR æquetur alterno TVM chordæ VM cum tangente VT, qui (Coroll. 6 Prop. 9. Geom.) æquatur angulo MHN inſiſtenti in alterno ſegmento, ſimilia erunt triangula VRM, MNH, eritque VR

 ad

ad RM, ut MN, ſive ipſa MR ad NH, & quadratum MR æquale rectangulo ſub VR, & HN. Eodem prorſus argumento anguli VR*m*, H*nm* æquales ſunt, & æquales V*m*R, & *n*H*m*, adeoque eſt etiam VR ad R*m*, ut *mn*, ſive R*m* ad H*n*, adeoque quadratum R*m* æquale rectangulo ſub H*n*, & VR.

506. Cum igitur quadratum ſemiordinatæ Sectionis Conicæ, in quavis e tribus figuris æquetur (num. 495) rectangulo ſub VR, & RL, patet fore id quadratum majus, æquale, vel minus quadrato MR, vel *m*R, ac punctum M, vel *m* debere jacere intra eam Sectionem Conicam, in ea, vel extra prout RL fuerit major, æqualis, vel minor reſpectu HN, vel H*n*.

507. Jam vero ſi is circulus intercipiat chordam VH majorem latere recto VA, accipiatur recta HB verſus V, ſi intercipiat chordam minorem, accipiatur pariter verſus V recta H*b* æqualis ipſi lateri recto. Et quoniam chorda M*m* poteſt accedere ad tangentem VA quantum libuerit, ac in eo acceſſu poſſunt puncta M, R, *m* ad V, & ad ſe invicem accedere quantumlibet, & ob MN, *mn* ſemper parallelas eidem rectæ HT, etiam puncta N, *n* poſſunt accedere ad R, & V quantumlibet, in quo acceſſu incipiet aliquando HN eſſe in primo caſu major, & in ſecundo H*n* minor, quam RL; quod in Parabola in fig. 190 accidet ſtatim ac punctum N ſubierit inter B, & V, vel *n* inter *b* & V, cum nimirum recta RL ibi æquetur VA, ſive HB in primo caſu, H*b* in ſecundo. In Ellipſi vero in fig. 189 in primo caſu ante etiam quam N ſu-

ſubeat inter B, & V, HN incipiet eſſe major, quam RL, cum HB æqualis AV jam ſit major RL, & in Hyperbola in ſecundo caſu in fig. 191 antequam *n* ſubeat inter *b*, & V, jam H*n* erit minor, quam RL, cum H*b* ſit æqualis VA, adeoque minor RL. At pro ſecundo caſu Ellipſeos, vel primo Hyperbolæ, accedente R ad V quantum libuerit, etiam O ad R accedet quantumlibet, & proinde ibi *bn*, hic BN fiet aliquando major, quam OR, & tunc in Ellipſi ob H*b*, OL æquales eidem AV, & inter ſe, demptis inæqualibus relinquetur H*n* minor quam RL, & in Hyperbola addendo æqualibus HB, OL inæquales BN, OR, evadet HN major, quam RL. Per reliquum autem arcum omnem MV*m*, accedente adhuc magis N, vel *n* ad V, & adhuc magis aucta BN, vel *bn*, & imminuta RO, multo magis HN ſuperabit RL, vel H*n* ſuperabitur ab ipſa.

508. Quare per totum illum arcum recta RM in primo caſu erit major, quam ſemiordinata Sectionis Conicæ, adeoque multo magis R*m*, & in ſecundo caſu recta R*m* erit minor, quam ordinata ejuſdem, ac multo magis RM, adeoque in circulis intercipientibus chordam VH majorem latere recto ſemper aliquis arcus MV*m* utrinque circa contactum V jacebit extra Sectionem Conicam; in circulis vero intercipientibus chordam minorem ipſo latere recto, aliquis arcus utrinque circa ipſum contactum jacebit intra. Quoniam vero minores circuli toti intra majores jacent, & proinde minorem etiam intercipiunt chordam VH, omnes ii, qui intercipiant chordam ma-

jorem latere recto jacebunt etiam extra eum, qui intercipiet æqualem, & omnes, qui intercipient minorem, jacebunt etiam intra eundem; is circulus, qui æqualem intercipit, ita ad arcum Sectionis Conicæ accedit circa ipſum contactum, ut cujuſvis alterius utcumque paullo majoris arcus aliquis utrinque circa contactum jaceat tum extra eum circulum, tum extra eum arcum Sectionis Conicæ, cujuſvis vero alterius utcumque paullo minoris arcus aliquis utrinque circa contactum jaceat, tum intra eum circulum, tum intra Sectionis Conicæ arcum; ac proinde nullius circuli arcus poterit duci inter arcum Sectionis Conicæ, & arcum ejus circuli, qui intercipit chordam lateri recto æqualem, qui proinde præ cæteris omnibus ipſi arcui eſt proximus, & iccirco jure dicitur *Oſculator*.

Coroll. 3.

509. *Circulus qui Conicam Sectionem oſculatur in vertice axis utriuslibet, habet pro diametro latus rectum ejus axis, ac perimetrum in eodem unico puncto contingit ita, ut qui oſculatur Ellipſim in vertice axis conjugati, totus extra Ellipſim jaceat, ac ſit minimus ex circumſcriptis, in cæteris omnibus totus jaceat intra, ac ſit maximus ex inſcriptis, nec in priore caſu ullus inſcriptorum maximus habeatur, in poſteriore ullus minimus circumſcriptorum.*

510. Nam ſi concipiamus VH pertinere ad axem aliquem; tangens VA erit ipſi perpendicularis, adeoque ipſa VH, quæ æquatur lateri recto AV, evadit diameter circuli. Chorda quoque

que M*m* evadet ipſi VH perpendicularis, ac proinde ſecabitur bifariam in R, & MN, *mn* congruent cum MR, *m*R, punctis N, *n* abeuntibus in R, quadratum vero tam RM, quam R*m* evadet æquale rectangulo ſub VR, & RH. Quare ſi VH fuerit æqualis lateri recto in fig. 191 in Hyperbola, & in Parabola in fig. 190, erit HR ſemper minor, quam RL, cum debeat eſſe minor, quam HV, ſive quam VA, quæ in Parabola æquatur RL, & in Hyperbola eſt ipsâ adhuc minor. At in Ellipſi in fig. 189 cum ſit VR ad OR, ut V*u* ad AV, erit VR major, vel minor, quam RO, prout axis *u*V fuerit major, vel minor ſuo latere recto VA. Quare ob VH æqualem VA, adeoque OL, erit contra RH minor, vel major RL, prout axis fuerit major, vel minor ſuo latere recto. Axis autem tranverſus major eſt ſuo latere recto, conjugatus minor, cum axis tranſverſus coujugato ſit major, & latus rectum utriuslibet axis ſit (num. 351) continue proportionale poſt ipſum, & axem alterum. Igitur ſi V fuerit vertex axis tranſverſi, erit HR minor ſemper, quam RL, ſi conjugati major. Quamobrem in vertice axis conjugati Ellipſeos erunt RM, R*m* ſemper majores, quam ordinata ejuſdem Ellipſeos, in reliquis omnibus axium verticibus erunt minores; & prinde circulus, qui Conicam Sectionem oſculatur in aliquo axis vertice, eam in eodem unico puncto contingit, & qui oſculatur Ellipſim in vertice axis conjugati, totus extra ipſam jacet, reliqui jacent intra omnes, ac ille eſt circumſcriptus, hi omnes inſcripti.

 511. Por-

511. Porro quoniam in illo caſu omnes circuli majores cadunt extra & curvam, & oſculatorem, ac minores omnes & intra ipſum, & per aliquem arcum utrinque circa contactum etiam intra Ellipſim cadunt; ille eſt circumſcriptorum minimus: cum vero e contrario in reliquis caſibus omnes minores cadant intra & curvam, & oſculatorem, omnes autem majores & extra ipſum, & per aliquem arcum utrinque circa contactum cadant extra curvam, is erit inſcriptorum maximus. Porro nullus in primo caſu minor oſculatore, in reliquis major, ita ad eum accedet, ut alii propiores haberi non poſſint numero infiniti, ſecto nimirum centrorum intervallo, ut libuerit, pro novo centro circuli intermedii, qui intermedius adhuc aliquo arcu utrinque circa contactum cadet in illo primo caſu etiam intra curvam, in hiſce reliquis extra. Quare nullus habebitur ibi inſcriptorum maximus, hic minimus circumſcriptorum.

Coroll. 4.

512. *Circulus, qui Sectionem Conicam oſculatur in vertice cujuſvis alterius diametri, licet eandem ibi tangentem habeat, tamen ibidem eum ſecat ita, ut ex parte anguli obtuſi chordæ illius æqualis lateri recto cum tangente, jaceat extra ipſam Sectionem Conicam, ex parte vero anguli acuti intra, ac præterea in alio puncto, quod in eo geometrice definiri poteſt, ipſam iterum ſecat.*

513. Ducatur enim in fig. 190 in Parabola chorda VF parallela tangenti HT, & patet puncto *m* aſſumpto, ut figura indicat, ultra eam chordam ſemper debere *mn* ipſi FV parallelam jacere

ultra

ultra ipſam, & H*n* fore majorem, quam HV, ſive in caſu circuli oſculatoris, quam VA, vel RL: at ipſo puncto *m* abeunte in F, abibit *n* in V, ac fient HN, RL æquales: eodem vero puncto *m* deſcendente in arcum FH, etiam *n* ingredietur chordam VH, eritque H*n* minor, quam HV, adeoque minor, quam RL. Quare per totum arcum V*m*F erit R*m* major ſemiordinata Parabolæ, in F æqualis, per arcum FH minor: per totum autem arcum VMH erit HN minor, quam HV, adeoque minor, quam RL, & MR minor, quam ſemiordinata Parabolæ. Arcus igitur VMH ex parte anguli acuti jacet intra Parabolam totus, & V*m*F in angulo obtuſo extra, quam Parabolam proinde is circulus ſecat in V, & cum iterum arcus FH jaceat intra Parabolam, eam idem circulus ſecat in F.

514. At in Ellipſi in fig. 189 arcus V*m* jacebit omnino extra, ſaltem donec *n* cadat extra circulum, cum debeat H*n* eſſe major, quam HV, adeoque major, quam VA, & multo major, quam RL; at pro parte oppoſita ſi verſus H capiatur TQ ad TH, ut eſt latus tranſverſum V*u* ad rectum VA, & ducatur VQ occurrens circulo in F, totus arcus VMF jacebit intra, & circulus in ipſo puncto F iterum Ellipſim ſecabit. Ducta enim ad quodvis punctum G inter T, & Q recta VG, quæ circulo occurrat in M, ac producta NM uſque ad tangentem in I, erit NV ad RV, ut NI ad MI, ſive (num. 204) ut HT ad GT, & erit VR ad RO, ut V*u* ad VA, ſive ut TQ ad TH. Quare ex æqualitate perturbata erit

VN

VN ad RO, ut TQ ad TG, adeoque donec TG fuerit minor, quam TQ, erit & RO minor, quam VN, ac proinde ob OL, VH æquales, erit RL major NH, & ſemiordinata Ellipſeos major, quam RM, ac punctum M intra Ellipſim. Abeunte vero G in Q, & M in F, evadent VN, RO æquales, & punctum M erit in ipſa Ellipſi; facta autem TG adhuc majore, evadet M extra Ellipſim, adeoque totus arcus VMF jacebit intra Ellipſim, quam circulus deinde iterum ſecabit in F.

515. Demum in Hyperbola in fig. 191 ſemper erit HN minor, quam HV, adeoque minor, quam VA, & multo minor, quam RL; ac proinde totus arcus VMH jacebit intra, facta autem TQ ad TH in eadem ratione lateris tranſverſi ad latus rectum, ſed ad partes oppoſitas, ac ducta recta QV, quæ circulo occurrat in F, tum per quodvis punctum G ipſius TQ ducta GV*m*, eodem prorſus argumento erit V*n* ad R*u*, ut I*n* ad *m*I, ut HT ad TG, & erit VR ad RO, ut V*u* ad VA, ut TQ ad TH; ac proinde *n*V ad RO, ut TQ ad TG; nimirum donec TG fuerit minor, quam TQ, quod fiet per totum arcum VF, erit RO minor, quam V*n*, & proinde RL minor, quam H*n*, nimirum ſemiordinata Hyperbolæ minor, quam R*m*, & *m* extra ipſam Hyperbolam. Abeunte *m* in F, & G in Q, habebitur æqualitas, & punctum *m* erit in Hyperbolæ perimetro, tum per totum arcum FH, evadente TG majore, quam TQ, jacebit *m* intra Hyperbolam.

Co-

Coroll. 5.

516 *Nullus arcus utcumque parvus circuli oſculatoris congruit cum arcu Sectionis Conicæ, ſed cum ea angulum continet quovis circulari minorem.*

517. Patet primum ex ipſa demonſtratione Corollarii ſecundi, & tertii, cum nuſquam in caſu Coroll. 2. NM, *mn* fiant æquales ſemiordinatis Sectionis Conicæ, & in caſu Coroll. 3. punctum F congruat cum ejus perimetro ita remotum ab oſculo V, ut in arcu continuo circa ipſum V ſit NM ſemper minor, *nm* ſemper major. Patet autem & ſecundum ex Coroll. 2, cum nullus circularis arcus duci poſſit inter arcum Sectionis Conicæ, & arcum circuli oſculatoris.

Corall. 6.

518. *Hyperbola, Parabola, & Ellipſis idem habentes latus rectum, & eandem inclinationem ordinatarum ad diametrum, cujus id eſt latus rectum, habent circulum oſculatorem æqualem, quæcumque ſit diametri magnitudo, ad quam tamen ubi arcus circuli jacet intra Conicam Sectionem, ut ex parte anguli acuti, & arcus* VM *in quavis diametro, ac in vertice axis Parabolæ, vel axis tranſverſi Hyperbolæ, omnium maxime accedit Ellipſis, & eo magis, quo ejus diameter eſt minor, tum Parabola, tum omnium minime Hyperbola, & eo minus, quo minor eſt ejus diameter. Contra vero ubi arcus circuli jacet extra: ac ut, licet in angulo rectæ tangentis cum arcu circuli nulla alia recta duci poſſit, & is angu-*

lus

lus ſit quovis rectilineo minor, poſſunt tamen duci arcus circulorum majorum, qui eo propius ad tangentem accedunt, quo diameter eſt major, ſic licet in angulo circuli oſculatoris cum arcu Sectionis Conicæ nullus alius circulus duci poſſit, & is angulus ſit minor quovis circulari, poſſunt tamen duci arcus Sectionum Conicarum, qui eo propius ad circulum oſculatorem accedent, quo diametri ad eas partes tangentis, ad quas circulus jacet, majores fuerint, vel ad oppoſitas minores.

519. Omnes ejuſmodi Sectiones Conicas æqualem habere circulum oſculatorem patet, quia ſuperpoſitis diametris, omnes ii circuli congruent, omnes nimirum eandem habebunt tangentem, & ex eadem recta intercipient chordam eandem æqualem communi lateri recto. Porro in fig. 189. quo major fuerit axis Vu, eo, manente puncto A, erit minor recta RO quarta poſt Vu, VA, VR, adeoque eo major RL, & major utraque ordinata. Quamobrem eo magis ejuſmodi ordinata ſuperabit RM, at eo minus ſuperabitur ab Rm, & eo magis diſtabit arcus ipſius ab arcu VM, vel minus ab arcu Vm. In Parabola vero in fig. 190, in qua RL jam æquatur VA, ea erit major, quam in ulla Ellipſi. Demum in Hyperbola in fig. 191, adhuc RL eſt major, quam VA, & eo major, quo major eſt RO quarta poſt uV, VA, VR, adeoque eo major, quo uV minor. Subibit igitur ex parte VM arcus cujuſvis Hyperbolæ habentis diametrum uV majorem inter arcum habentis minorem, & arcum

cum VM, ac inter eos omnes, & VM ſubibit arcus Parabolæ, tum inter hunc quoque arcus cujuſvis Ellipſeos, & inter arcum Ellipſeos habentis diametrum majorem, ac VM ſubibit arcus habentis ipſam minorem. Ex parte vero V*m* inter arcum V*m*, & arcum Ellipſeos habentis minorem diametrum V*u* ſubibit arcus habentis majorem, tum inter hos omnes, & illum arcus Parabolæ, tum Hyperbolarum omnium eo propius, quo majorem habuerint diametrum V*u*. Eodem vero argumento continget primum illud utrinque in axium verticibus, ubi arcus circuli jacet intra, hoc ſecundum, ubi extra. Reliqua patent ex his.

Coroll. 7.

520. *In Ellipſi & Hyperbola radius circuli oſculatoris eſt tertius continue proportionalis poſt perpendiculum e centro in tangentem ductum, & ſemidiametrum conjugatam, & radii circulorum oſculatorum inter ſe ſunt in ratione reciproca triplicata ejuſmodi perpendiculorum, ac directa triplicata normalium ad utrumlibet axem terminatarum.*

521. Si enim circulus oſculetur Ellipſim in F.192
fig.192, vel Hyperbolam in fig.193 in P, e dia- 193
metro P*p* abſcindet (num. 503) chordam PH æqualem lateri recto ejus diametri. Sit ejus circuli centrum in K, & recta KE perpendicularis ipſi chordæ eam bifariam ſecabit in E, ac ducto CL perpendiculo in tangentem PQ, erunt ſimilia triangula rectangula CLP, PEK, nam eorum anguli ad C, & P erunt alterni in fig.192, internus, ac externus; & oppoſitus in fig.193. Erit

Erit igitur CL ad CP, ut PE ad PK. Sed cum PE ſit dimidium latus rectum diametri P*p*, ducta diametro conjugata IC*i*, erit (num.351) CP ad CI, ut CI ad PE. Igitur ex æqualitate perturbata erit CL ad CI, ut CI ad radium circuli oſculatoris PK.

522. Hinc autem eruitur, fore radium KP æqualem quadrato ſemidiametri conjugatæ CI applicato ad perpendiculum CL, adeoque in ratione compoſita ex directa duplicata ipſius ſemidiametri, & reciproca ſimplici ejus perpendiculi; nimirum cum ſemidiametri conjugatæ ſint (n.466) reciproce ut ejuſmodi perpendicula, erit ille radius in ratione reciproca triplicata ejuſdem perpendiculi, quæ (num.459) eſt eadem, ac ratio directa triplicata normalis ad utrumlibet axem terminatæ.

Coroll.8.

523. *In quavis Sectione Conica radius circuli oſculatoris eſt quartus continue proportionalis poſt dimidium latus rectum principale, & normalem terminatam ad axem tranſverſum.*

524. Eſt enim in Ellipſi, & Hyperbola PM ad PK, ut rectangulum ſub PM,& CL, ſive (n.459) quadratum ſemiaxis conjugati CD, ad rectangulum ſub CL, & PK, ſive (num.520) quadratum ſemidiametri conjugatæ CI, nimirum (num.466) ut quadratum perpendiculi CL ad quadratum ſemiaxis tranſverſi CV, ſive (num.477) ut quadratum dimidii lateris recti principalis ad quadratum normalis PM. Quare ſi inter PM, & radium PK ſumatur recta media proportionalis, ad cu-

cujus quadratum erit quadratum PM, ut ipſa PM ad PK, ſive ut quadratum dimidii lateris recti principalis ad quadratum normalis, erit ipſa etiam normalis ad eam rectam, ut dimidium latus rectum principale ad normalem, & dimidium latus rectum principale, normalis PM, ea recta aſſumpta, ac PK continue proportionales.

525. In Parabola vero, fig. 194, ſi tangens ducta per P occurrat tangenti ductæ per verticem V in A, recta FA eſt (num. 196) perpendicularis ipſi tangenti PA, & (num. 198) media proportionalis inter FV, FP, quarum prima eſt (num. 198) quarta pars lateris recti principalis, adeoque (n. 200) dimidia ſubnormalis RM, ſecunda vero (n. 351) quarta pars lateris recti diametri tranſeuntis per P, adeoque rectæ PH, & proinde dimidia PE, ac triangula FVA, PRM, PEK ſimilia ſunt ob omnia latera parallela. Quare erit PM ad PK, ut RM ad PE, ſive, ſumptis dimidiis, ut FV ad FP, nimirum ut quadratum FV ad quadratum FA, ſive ut quadratum RM dimidii lateris recti principalis ad quadratum PM, adeoque eodem argumento PK quarta continue proportionalis poſt ipſum dimidium latus rectum principale, & ipſam normalem PM. F. 194

SCHOLIUM II.

526. Poterat communi & faciliori demonſtratione idem Corollarium hoc etiam pacto demonſtrari. Radius circuli oſculantis perimetrum in vertice axis tranſverſi (num. 509) æquatur dimidio lateri recto principali: ibidem au-

F.173 autem normalis PM in fig.173, 174, 176 eva-
174 neſcente PR evadit æqualis ſubnormali RM,
176 ſive rectæ RD, quæ abeunte R in V evadit æqualis dimidio ipſi lateri recto VO. Cum igitur (num. 520) ſint radii ipſi, ut cubi normalium, erit dimidium latus rectum principale ad radium circuli Sectionem Conicam oſculantis in quovis puncto in ratione triplicata ipſius dimidii lateris recti ad normalem, ac proinde ille radius quartus continue proportionalis poſt ipſum dimidium latus rectum, & normalem.

Coroll. 9.

527. *Circulus, qui communem in aliquo puncto tangentem habet cum Sectionis Conicæ perimetro, & ipſi perimetro in aliquo alio puncto occurrit, abit in ipſum circulum oſculatorem, ubi id punctum ita ad contactum illum accedit, ut demum in ipſum abeat, ac concurſus binarum rectarum, quarum altera ſit perimetro perpendicularis in extremo puncto chordæ cujuſpiam, altera ipſi chordæ perpendicularis in ejus medio, vel altero extremo, abit in centrum circuli ipſam oſculantis in priore illo puncto, vel in finem diametri ipſius circuli per illud idem punctum tranſeuntis, ubi evaneſcente chorda, congruunt extrema ejus puncta.*

528. Si enim in fig. 189, 190, 191 V ſit contactus ille, & M, vel *m* ad Conicam Sectionem
E.189 pertineat, erit ex natura circuli (num. 505)
190 HN, vel H*n* tertia poſt VR, & RM, vel R*m*, ac
191 ex natura Sectionis Conicæ (num. 495) RL pariter tertia poſt eaſdem. Quare ſemper HN, vel H*n*

H*n* æqualis RL. Accedat jam M, vel *m* ad V ita, ut demum congruant: coibunt ſimul cum ipſo puncto V etiam puncta M, *m*, N, *n*, ac punctum L abibit in A. Quare & HV fiet æqualis HN, ſive RL, nimirum lateri recto VA, & proinde circulus (num. 503) evadet oſculator; unde patet primum.

529 Iam vero diameter per contactum V transiens eſt perpendicularis tangenti, adeoque & perimetro Sectionis Conicæ, ac recta quidem ex centro ducta ad angulos rectos in chordam VM, vel V*m* debet ipſam ſecare bifariam, recta vero ex extremo illius diametri puncto ducta ad punctum M, vel *m* extremum chordæ, debet continere angulum in ſemicirculo rectum. Quare patet, concurſum rectæ perpendicularis perimetro ductæ per V cum recta perpendiculari chordæ ducta per mediam ipſam chordam, vel ejus extremum M, vel *m*, debere abire in centrum circuli oſculatoris, vel extremum punctum ejus diametri, ubi punctis M, vel *m*, & V coeuntibus, evaneſcit chorda.

Coroll. 10.

530. *Binarum normalium per bina Sectionis Conicæ puncta ductarum concurſus abit in centrum circuli oſculatoris, ubi ea puncta ad ſe ita accedunt, ut demum congruant.*

531. Concurrant enim in fig. 195 in Parabola, 196 in Ellipſi, 197 in Hyperbola binæ normales PK, *p*K in K, & ſecent axem tranſverſum in M, *m*, ac aſſumpta VO perpendiculari axi tranſverſo, & æquali dimidio lateri recto F. 195 196 197

principali, recta ex O ducta parallela axi in fig. 195, ad centrum C in fig. 196, 197 occurrat ſemiordinatis PR, *pr* productis in D, *d*, eritque (num. 464) ſubnormalis RM, *rm* æqualis RD, *rd*. Chorda P*p* occurrat axi tranſverſo in Q, & recta ex P parallela ipſi axi occurrat rectis *pr*, *p*K in H, E. Erit ubique PK ad MK, ut PE ad M*m*, ſive in ratione compoſita PE ad PH, & PH, vel R*r* ad M*m*.

532. Porro PE ad PH eſt (num. 204), ut Q*m* ad Q*r*, & R*r* in fig. 195 æquatur M*m*, cum æquentur RD, *rd*, adeoque & RM, *rm*, &, dempta communi M*r*, ipſæ R*r*, M*m*. At in fig. 196 ſumpta OB æquali ſemiaxi tranſverſo CV verſus V, & in fig. 197 ad partes oppoſitas, ductaque CB, quæ ipſis ſemiordinatis occurrat in T, *t*, ductiſque *d*I, *d*A parallelis CV, CB uſque ad rectam DP, erit M*m* æqualis IA. Erit enim OB ad DT, ut OC ad DC, ut CV ad CR, adeoque & ob OB, CV æquales, erit DT æqualis CR, ac eodem argumento *dt* æqualis C*r*, quæ etiam cum ſit æqualis AT, erit R*r* æqualis DA; cumque ſit & RD æqualis RM, erit RA æqualis *r*M; eſt vero & *rm* æqualis *rd*, ſive RI. Igitur erit M*m* æqualis IA. Inde vero cum bina quævis latera triangulorum I*d*A, VCB ſint parallela, erit *d*I ad IA, ſive R*r* ad M*m*, ut CV ad VB.

533. Coeant jam puncta P, *p*, & ſecans *p*PQ
F.198 abibit in tangentem, coibunt puncta R, *r*, &
199 puncta M, *m*; fig. 195, 196, 197 mutabuntur
200 in 198, 199, 200, & erit PK ad KM in Para-
bo-

bola in fig. 198, ut QM ad QR, at in reliquis in ratione compoſita ex ipſa QM ad QR, & ex altera ſemiaxis tranſverſi CV ad VB differentiam in Ellipſi, ſummam in Hyperbola ejus, & dimidii lateris recti principalis VO.

534. Porro ob ſimilia triangula QPM, RPM, QRP, eſt tam MQ ad QP, quam QP ad QR, ut MP ad PR, adeoque QM ad QR, ut quadratum MP ad quadratum PR. Quare erit in Parabola in fig. 198 PK ad KM, ut quadratum PM ad quadratum PR, adeoque ſumendo differentiam terminorum ad antecedentem, erit quadratum dimidii lateris recti MR ad quadratum normalis PM, ut ipſa normalis PM ad PK. At in Ellipſi, & Hyperbola cum ſit (num. 479) ſemiaxis tranſverſus CV ad VB ibi differentiam, hic ſummam ipſius, & dimidii lateris recti principalis, ut quadratum ſemiordinatæ RP ad differentiam quadratorum normalis PM, & dimidii lateris recti principalis VO, binæ illæ rationes compoſitæ erunt quadrati PM ad quadratum PR, & quadrati PR ad eam quadratorum differentiam, quæ reducuntur ad unicam quadrati PM ad ſuam differentiam a quadrato VO. Erit igitur KP, ad KM, ut quadratum PM ad differentiam quadratorum PM, VO, adeoque PM differentia priorum terminorum ad primum PK, ut quadratum VO ad quadratum PM.

535. Igitur ubique ratio normalis PM ad PK eſt eadem, ac quadrati OV, ad quadratum PM, adeoque eodem argumento, quo in ſuperioris Corollarii demonſtratione, PK quarta continue

proportionalis poſt dimidium latus rectum principale VO, & normalem PM, ac proinde æqualis radio circuli oſculatoris, puncto K abeunte in ipſius circuli oſculatoris centrum.

SCHOLIUM III.

536. Videbimus ſuo loco, ubi nimirum de curvis generaliter agemus ope infiniteſimorum, generalem hanc proprietatem eſſe circulorum oſculatorum, ut nimirum eorum arcus cum arcu curvæ angulum conſtituat quovis circulari minorem ita, ut licet in unico conveniant puncto, & in eo angulo infiniti aliarum curvarum arcus duci poſſint, adhuc tamen non poſſit ullus circularis arcus, & concurſus ultimus rectæ ſecantis chordam ad angulos rectos, ac bifariam cum normali per alterum ejus extremum ducta, vel binarum normalium, incidat in ipſum centrum circuli oſculatoris, ubi binis perimetri punctis coeuntibus chorda evaneſcit. Sed interea libuit ea hic ex ipſa natura, & proprietatibus Sectionum Conicarum de ipſarum circulis oſculatoribus accuratiſſime demonſtrare per finitam Geometriam.

537. Et quidem poſtremum hoc Corollarium uſus etiam in Phyſica magnos habet, ut ubi quæritur Telluris figura per graduum dimenſiones. Nam gradus Terræ dicitur ejus ille arcus, per cujus extrema puncta ductæ binæ normales, ubi conveniunt, angulum continent unius gradus, illæ vero conveniunt prope centrum circuli ipſum arcum

arcum oſculantis in medio, cum ea puncta parum a ſe invicem diſtent, & ſi ea congruant in medio, concurſus normalium in id centrum abire debet. Quare præcedentis Corollarii vi aſſumi ſolet pro arcu curvæ arcus exiguus circuli oſculatoris, qui ab eo parum admodum differre poteſt; cum arcus circuli in oſculatorem deſinentis debeat ad ipſum accedere ultra quoſcumque limites, antequam congruant, & ſemper arcus alicuis curvæ concludatur inter arcum circuli oſculatoris, & arcum vel majoris, vel minoris circuli, deſinentis demum in oſculatorem ipſum, ubi arcus curvæ in infinitum imminutus penitus evaneſcit.

538. Ubi in Coroll.4. in fig.189 Ellipſim conſideravimus, expreſſimus in ipſa figura caſum, in quo latus rectum VH eſſet majus diametro V*u*, in quo caſu, ut ipſa figura exhibet, ſumpta TQ ad TH in ratione V*u* ad HV, punctum Q cadit inter H, & T. Si latus rectum æquaretur diametro, abiret punctum Q in H, adeoque & punctum F, in quo circulus oſculator Ellipſim iterum ſecat, abiret in H; quod ſi adhuc eſſet minus, & excederetur ab ipſa V*u*, abiret Q citra H in tangentem TH productam, & F in arcum V*m*H, quo caſu ad demonſtrandum eam partem arcus VF, quæ jaceret citra H, eſſe intra Ellipſim, immutanda nonnihil eſſet demonſtratio, & ei aptanda caſui, quod facile fieri potuiſſet; ſed ad id, quod propoſitum fuerat, id quidem non erat neceſſarium, cum nimirum ſatis eſſet oſtendere, aliquem arcum VM jacere intra, aliquem V*m* F.189

extra, & alicubi debere iterum Ellipſim ſecari a circulo oſculatore in puncto, quod geometrice definiri poſſet, quæ quidem omnia ex ipſa conſtructione caſus primi in figura expreſſi, pro caſibus omnibus fiunt ſatis manifeſta, ac ejus demonſtratio iis omnibus, vel prorſus communis eſt, vel admodum facile accomodatur.

539. Porro non erit abs re conſiderare, quo
pacto circulus aliquis Sectionis Conicæ oſculator
evadat. Poteſt eam circulus in quatuor punctis ſe-
F.201 care, ut in fig.201 ſecat Ellipſim in punctis P,
202 A, B, C. Nam circulum aliquem cuilibet Se-
203 ctioni Conicæ poſſe occurrere in quatuor pun-
204 ctis, admodum facile demonſtratur; ut ſi per bi-
205 na extrema puncta unius rectæ axi ordinatæ,
& per unum extremum alterius ducatnr circu-
lus; is profecto tranſibit etiam per alterum po-
ſterioris extremum. Habebit enim centrum in
ipſo axe priorem ordinatam, ſuam chordam, ſe-
caqte bifariam, adeoque & poſteriorem ordina-
tam habebit pro chorda, quam itidem ſecabit
bifariam. Si jam centri locus mutetur ita, ut
bina puncta A, P cougruant; evaneſcente com-
muni chorda PA, communis ſecans EG abit in
communem tangentem, ac ipſe circulus Ellipſim
contingit in P, figura 201 abeunte in 202, ubi
circulus, & Ellipſis ſe mutuo contingunt in P,
& adhuc ſe poſſunt ſecare in binis aliis punctis
C, B; centrum autem K jacebit in recta PK
perpendiculari tangenti, & contactus erit exte-
rior, arcu circuli utrinque circa contactum P
exiſtente extra Ellipſim. Quod ſi perpetuo mi-
nuatur

nuatur radius PK, interſectio illa C accedet ad P, donec in ipſum P incidat, quo caſu evadet circulus oſculator, in cujus oſculo tria communia puncta uniuntur in unicum, quod ſaltem tribus æquivalet interſectionibus, vel uni contactui, & uni interſectioni. Interea vero & altera illa interſectio B aſcendet, & ſi P fuerit vertex axis cujuſdam, tum PK erit in ipſo axe, & admodum facile demonſtratur, fore eo caſu interſectiones C, & B æque diſtantes a P, ut in fig.203, nec poterit abire C in P, niſi abeat & B, oſculo in axium verticibus æquivalente quatuor communibus punctis, ſive quatuor interſectionibus, vel binis interſectionibus, & uni contactui, vel binis contactibus. At ubi P non eſt in vertice axis alicujus, ut in fig. 202, puncta C, & B non æque diſtabunt a P, & mutata circuli magnitudine prius alterum, ut C, eo appellet, altero B adhuc inde diſtante per aliquod intervallum, unde fit, ut circulus, qui Conicam Sectionem oſculatur in axium verticibus, ipſi nuſquam alibi occurrat, nec ibidem ſecet, ſed vel inſcriptus ſit, vel circumſcriptus, ut oſtendi Coroll.3, at in verticibus reliquarum diametrorum ibidem eam tangat, & ſecet, tum iterum ſecet alicubi, ut vidimus Coroll. 4. Quod ſi adhuc minuatur radius PK, jam illa interſectio C tranſibit ad partes oppoſitas P, ut in fig.204: contactus fiet interior, & tamen aliquis arcus CB adhuc extra Ellipſim cadet, donec coeuntibus etiam punctis C, B, contingat ipſam iterum interius, ac demum totus incipiat cadere intra Ellipſim.

 540. Et

540. Et quidem ſi P, *p* in fig.205 fuerit axis conjugatus, & concipiatur, facto centro alicubi in ipſo axe in K, circulus radio PK primo quidem minimus, tum perpetuo creſcens; is quidem primo erit totus intra Ellipſim, tum eam continget iterum in *p*, deinde, ut figura exprimit, eam ſecabit in binis punctis C, B, quæ perpetuo accedent ad P, cum quo congruent, ubi ipſe circulus habuerit pro diametro latus rectum ejus axis, & evaſerit oſculator; ac is erit primus ex iis, qui tangent Ellipſim exterius, qui quidem reliqui omnes erunt eo majores, & toti extra Ellipſim cadent.

541. At in fig. 203 ſi P*p* fuerit axis tranſverſus, & concipiatur circulus primo quidem maximus, tum perpetuo imminutus; primo quidem ambiet univerſam Ellipſim, tum continget etiam in *p*, deinde ſecabit in binis punctis C, B, quæ cum ipſo P congruent, ubi is habuerit pro radio dimidium latus rectum ejus axis, & evaſerit oſculator, ac is erit primus ex iis, qui tangent Ellipſim interius, qui quidem erunt reliqui omnes eo minores, & toti intra Ellipſim cadent. Et idem accidet circulis tangentibus Parabolam, vel Hyperbolam in vertice axis tranſverſi, ſed in iis circulus utcumque magnus præter contactum in vertice ſemper habebit binas interſectiones, quæ illo imminuto accedent ad contactum P, in illum recident, nec uſquam jam erunt eodem prorſus ordine, quo in ſuperiore numero.

542. Extra axes vero ducta PK, ut in fig.202, perpendiculari tangenti EG, & facto circulo ingenti,

genti, is totus cadet extra Ellipſim, tum imminutus illam alicubi continget circa D, deinde ſecabit in binis punctis C, B, ac in Parabola, utcumque ſit magnus, ſecabit ſemper, & adhuc continget exterius, aliquo ejus arcu CPB jacente extra curvam, reliquo CDB intra. Imminuto vero etiam magis circulo, interſectiones illæ accedent ad contactum P, in quem ita incidet altera, ut C, ante alteram, ut ibi circulus perimetrum & tangat, & ſecet, altera interſectione B non congruente, ac alter ex arcubus a P ad B remanebit extra, ut prius, alter erit intra; tum radio adhuc imminuto, jam utrinque interius continget in P, tranſeunte, ut vidimus, C ad partes oppoſitas, ut in fig. 204, adhuc tamen exeunte arcu aliquo CB extra Sectionem Conicam, donec punctis C, B coeuntibus mutentur binæ interſectiones in contactum, ac deinde incipiat jacere circulus totus intra Sectionem Conicam.

543. Patet autem vel ex ejuſmodi conſideratione debere haberi circulum aliquem, qui ad arcum curvæ ejuſmodi accedat magis, quam quivis alius ita, ut in eorum angulo nullus alius circularis arcus duci poſſit, ac is vel inſcriptus ſit, vel circumſcriptus, in primo caſu maximus ex inſcriptis, in ſecundo minimus e circumſcriptis ita, ut ubi habetur minimus e circumſcriptis, nullus ſit maximus ex inſcriptis, & viceverſa. Dum enim arcus, qui jacebat in contactu extra curvam, motu continuo mutatus abit in jacentem intra, omnino alicubi is tranſitus haberi debet, & ſi

& ſi ob diverſam curvæ naturam, nullus circuli arcus congruit cum arcu ipſius curvæ, debet alicubi ille tranſitus fieri ita, ut e circulis omnibus aliquis ſit proximus, nec ullus propior haberi poſſit, qui ſi inſcriptus ſit, ſive intra curvam jaceat, quivis minor multo magis jacebit intra, quivis vero major extra, aliter ille proximus non eſſet, ſed is alius, qui eo major adhuc, jaceret intra, omnino eſſet propior. Erit igitur ille maximus ex inſcriptis: ſed utcumque parum alius quiſpiam illum excedat, ſemper alius haberi poterit, qui ipſum excedat minus, medius nimirum inter utrumque, & centrum inter eorum centra habens, qui adhuc & ipſe circumſcriptus erit, & curvæ propior, & priore circumſcripto minor, adeoque ille prior non poterat eſſe circumſcriptorum minimus, quod idem de hoc novo pariter demonſtratur, & de alio minore quovis, cum nimirum dato intervallo aliquo pro circuli radio, nullum haberi poſſit intervallum, quod ad ipſum accedat ita, ut infiniti alii accedentes magis haberi non poſſint. Atque eadem eſt demonſtratio pro excludendo maximo ex inſcriptis, ubi is, qui eſt proximus, eſt circumſcriptus.

544. Atque in his quidem attigimus tantummodo comparationem Sectionum Conicarum cum circulo. Omnia, quæ in prioribus 8 Propoſitionibus, & earum, ac Definitionum Corollariis, ac Scholiis demonſtravimus, pertinent ad comparationem rectarum cum Sectionibus Conicis, & earum occurſus, qui licet in ſingulis rectis bini tantummodo

do eſſe poſſint, adhuc tamen tantam proprietatum multitudinem prodiderunt, quarum aliæ etiam habentur quamplurimæ, quas omiſimus, quod minoris ſint uſus, & plæræque longiore demonſtrationum ambitu indigeant, ac complicatiores ſint. Quod ſi occurſus circuli, vel alterius Sectionis Conicæ, qui in ſingulis quaterni eſſe poſſunt, conſiderarentur generaliter, quam multæ, quanto ſublimiores proprietates profluerent, quæ quidem maxima ſaltem ex parte noſtræ menti imperviæ ſunt, qui nimirum rectæ lineæ ſolius naturam ſatis evidenter percipimus, & veluti intuemur, ac iccirco ad ipſas rectas exigimus curvas, quas contemplamur, & quarum proprietates immediate, & in ſe ipſis intueri non poſſumus? Alio mentis genere opus eſſet ad ejuſmodi Geometriam, quæ iſta omnia vel immediate videret, vel facile ex iis, quæ immediate videt, colligeret. Nos ea per quandam relationem ad rectas tantummodo contemplamur.

545. Quamobrem iis omiſſis, licet nonnulla longiore ambitu poſſemus aſſequi, progrediamur jam ad contemplandum Conum, ejuſque Sectiones, quæ hujuſmodi curvis nomen dederunt. Contemplabimur autem & ſectiones Cylindri, & Conoides genitas converſione Sectionum Conicarum circa ſe ipſas, earumque itidem ſectiones, ubi videbimus Ellipſoidem non gignere niſi circulum & Ellipſes, Paraboloidem addere Parabolas, Hyperboloidem vero etiam Hyperbolas continere. Sed in iis aliquanto minus immorabimur.

DE-

DEFINITIO III.

546. *SI recta* NVn *in ſig.*206 *utrinque indeſinita ſemper tranſiens per punctum datum* V *poſitum extra planum dati circuli* AB *perpetuo*
F.206 *motu percurrat ejuſdem circuli peripheriam ; ſuperficiem, quam generat, dico* Superficiem Conicam, *ſolidum ea incluſum, dico* Conum, V Verticem, *circulum ipſum* Baſim, *rectam* VC *tranſeuntem per verticem, & centrum circuli dico* Axem, *qui ſi fuerit perpendicularis plano baſis, Conum dico* Rectum, *ſecus* Scalenum, *rectam autem ipſam genitricem* Latus Coni.

SCHOLIUM I.

547. SOlent plerumque appellare conum id tantum, quod inter verticem, & baſim interjacet, reliquum vero ad eandem partem appellant conum productum, & ad oppoſitam, conum oppoſitum. At libet potius coni nomine appellare quidquid recta linea, quæ eſt locus geometricus ſimpliciſſimus, & natura ſua utrinque ſine fine produci poteſt, gignit motu continuo circa locum geometricum itidem ſimpliciſſimum, nimirum circuli peripheriam. Locus geometricus integer ab eorum locorum combinatione naſcitur, cujus fruſtum quoddam eſt id, quod certa quadam baſi, ac vertice terminatur. Sic ego Hyperbolarum ramos oppoſitos appellavi, quos alii fere Hyperbolas opppoſitas nominant.

Co-

Coroll. 1.

548. *Conus rectus generatur, ſi altero anguli* AVC *rectilinei latere* VC *immoto, alterum latus* VA *convertatur circa ipſum.*

549. Si enim ex quovis puncto A ducatur AC perpendicularis in VC, ea in illo motu generabit circulum (num. 30 ſolid.), qui erit baſis coni habentis verticem in V, cujus axis VC erit perpendicularis baſi ipſi.

Caroll. 2.

550. *Si Conus quivis ſecetur utcumque plano per verticem ducto, ſectio efficiet in ſuperficie coni binas rectas utrinque indefinite productas, continentes binos angulos ad verticem oppoſitos, quarum ſegmenta intercepta inter verticem & baſim in cono recto æqualia erunt inter ſe, in cono ſcaleno inæqualia ita, ut omnium minimum, ac maximum jaceant in plano tranſeunte per axem, & perpendiculum demiſſum e vertice in plano baſis, minimum quidem ipſi perpendiculo propius, maximum vero ab eodem remotius.*

551. Si enim ſectio fiat plano tranſeunte per verticem V, & bina puncta peripheriæ baſis AB, ubi recta genitrix deveniet ad puncta A, & B, congruet cum lineis VAQ, VBN ſectione genitis, cum debeant jacere in ſuperficie coni, & tranſire illa per puncta V, A, hæc per V, B. Quare ipſæ linæ VAQ, VBN erunt rectæ, & continebunt angulos QVN, *q*V*n* oppoſitos ad verticem.

552. Du-

552. Ductis autem AC, BC radiis baſis utique æqualibus, ipſi radii in cono recto continebunt cum axe VC angulos rectos. Adeoque triangulorum VCA, VCB habentium præterea latus VC commune, baſes VA, VB æquales erunt. Reliqua patent ex num.135. ſolidorum.

Coroll. 3.

553. *Quævis ſectio baſi parallela erit circulus, cujus centrum in ipſo occurſu axis cum eadem ſectione.*

554. Si enim ſectio baſi parallela occurrat axi in *c* ex utravis parte verticis, planis autem VCA, VCB in rectis *ca*, *cb*; erunt rectæ CA, *ca*, & CB, *cb* interſectiones planorum parallelorum parallelæ (num.9. ſolidorum). Quare cum rectæ A*a*, C*c*, B*b* tranſeant per idem punctum V, erit (num.204) *ca* ad *cb*, ut CA ad CB, nimirum in ratione æqualitatis. Manente igitur puncto A, & *a*, & utcumque mutato B, & *b*, ſemper *cb* erit æqualis eidem *ca*, adeoque *b* ad circulum radio *ca* deſcriptum.

Coroll. 4.

555. *Sectiones parallelæ utcunque inclinatæ ejuſdem coni erunt ſemper inter ſe ſimiles.*

556. Si enim AB, *ab* referant ſectiones quaſcumque parallelas utcunque etiam inclinatas, ac manentibus rectis VA, VC, planum CVB gyret utcumque circa rectam VC; erunt ſemper & CA, *ca*, & CB, *cb* parallelæ inter ſe, ac proinde adhuc

ca ad

ca ad *cb*, ut CA ad CB, adeoque puncta B, *b* (num. 111.) ad figuras ſimiles.

Coroll. 5.

557. *In Cono Scaleno alia quoque ſectio baſi non parallela, quæ dicitur ſubcontraria, eſt circulus.*

558. Si enim in fig. 207. per centrum C, & verticem V ducatur (num. 74 ſolid.) planum AVB perpendiculare plano baſis, tum ad quodvis punctum M rectæ AV fiat angulus VM*m* æqualis angulo VBA ita, ut recta M*m* faciat cum latere VA eum angulum, quem AB facit cum VB, unde ob angulum V communem, vel æqualem in triangulis AVB, MV*m*, conſequetur etiam, ut eadem M*m* cum VB contineat eundem angulum, quem AB continet cum VA; tum per M*m* fiat ſectio perpendicularis plano AVB (num. 74. ſolid.), ea ſectio dicitur ſubcontraria baſi, & eam fore circulum ſic facile demonſtratur. F. 207.

559. Per quodvis punctum R rectæ M*m* ducta ſectio parallela baſi occurrat plano AVB in *ab*, ſectioni ductæ per M*m* in recta P*p*. Ea erit circulus (num. 553.), cujus *ab* erit diameter, ac chorda P*p* interſectio binorum planorum perpendicularium eidem AVB, cum debeat ipſi perpendicularis eſſe, erit perpendicularis utrique *ab* & M*m*, ac a priore, utpote a circuli diametro, ſecabitur bifariam in R, eritque quadratum PR æquale rectangulo *a*R*b* (Coroll. 1. Prop. 13. Geom.). Porro in triangulis *a*RM, *b*R*m* anguli ad verticem oppoſiti in R æquales ſunt, & ob angu-

gulum VMR æqualem ex hypoteſi angulo VBA, ſive VbR, erit & aMR æqualis mbR. Quare ſimilia erunt ea triangula, & MR ad Ra, ut Rb ad Rm, ſive rectangulum MRm æquale rectangulo aRb; vel quadrato RP. Secta autem Mm bifariam in c quadratum cM æquatur rectangulo MRm, & quadrato cR ſimul (Coroll.2. Prop. 13. Geom.), adeoque æquabitur binis quadratis cR, RP ſimul, ſive ob angulum cRP rectum, quadrato cP. Erit igitur ſemper cP æqualis cM, adeoque punctum P ad circulum radio cM deſcriptum.

Coroll. 6.

560. *Pro baſi aſſumi poteſt quævis ſectio ſive parallela primæ baſi, ſive ſubcontraria ex utravis parte a vertice* V.

561. Nam quævis ejuſmodi ſectio circularis eſt, & recta per verticem V tranſiens, ac ejus ſuperficiem conradens eundem generat conum.

Coroll. 7.

562. *Quævis alia ſectio coni erit Ellipſis, Parabola, vel Hyperbola, prout planum per coni verticem ductum plano ſectionis parallelum cadet extra conum, vel eum continget, vel intra ipſum immergetur.*

563. Secetur enim quivis conus quovis plano non parallelo baſi, & planum ipſi ſectioni
F.268 parallelum ductum per perticem V occurret pla-
209 no baſis in recta quadam OS, quæ vel cadet
210 extra baſim, ut in fig.208, 209, vel eam con-
211 tinget alicubi, ut in fig.210, vel intra ipſam immer-

mergetur, ut in fig.211, ac ſi ducatur per centrum baſis C recta CT ipſi OS perpendicularis occurrens perimetro baſis in punctis A, & B, cadet punctum T in fig.208, 209 extra diametrum AB, in fig.210 in altero ejus extremo, ut B, in fig.211 intra diametrum, quæ nimirum ſegmentum rectæ OS circulo interceptum, cum ad angulos rectos ſecet, ſecabit (Coroll.4. Prop.5. Geom.) bifariam.

564. Ducto jam per ABV plano, quod plano illi OVS occurret in recta VT, ſuperficiei coni in rectis VA, VB, plano ſectionis in recta quadam I*i* parallela (num.9. ſolid.) rectæ VT ob paralleliſmum plani ſectionis cum plano OVT, quæ idcirco rectam VA ſecabit alicubi in M, ac ſi ponatur punctum I ab M verſus conum, *i* ad partes oppoſitas, neceſſario ſecabit in fig.208, 209 etiam latus VB alicubi in *m* verſus I, erit in fig.210 ipſi parallela, in fig.211 ſecabit verſus *i* ad partes oppoſitas ſupra verticem V ipſum latus BV productum, cum ipſa VB in fig. 208, 209 declinet ab VT verſus parallelam I*i* ad partes B, in fig.210 cum priore congruat, in fig.211 declinet verſus partem oppoſitam. Quamobrem rectæ I*i* ſegmentum M*m* totum, & ſolum jacebit in fig. 208, 209 intra conum, in fig. 211 extra, in fig.210. tota MI indefinita jacebit intra, tota vero M*i* extra.

565. Aſſumpto in ipſa I*i* puncto quovis R inter M, & *m* in fig.208, 209, extra eos limites in fig.211, ab M verſus I in fig.210 ducatur per id punctum planum parallelum plano baſis, quod plano AVB occurrat in recta *ab*, plano prioris

ſectionis in P*p*, & patet fore ipſam ſectionem hanc novam circulum (num. 553) diametro *ab*, ac ipſas *ab*, AT, ac P*p*, OS interſectiones planorum parallelorum cum eodem plano fore (num.9 ſolid.) parallelas inter ſe, adeoque (num.19 ſolid.) ut AT eſt per conſtructionem perpendicularis OS, ita erit diameter *ab* perpendicularis chordæ P*p*, quam proinde (Coroll. 4. Prop. 5. Geom.) ſecabit bifariam, adeoque & recta I*i* erit diameter quædam prioris ſectionis, cujus nimirum chordas per quodvis punctum R tranſeuntes parallelas eidem datæ rectæ OS, & inter ſe, ſecabit bifariam.

566. Ducta MD parallela AB, quæ rectæ VB occurrat in D, ac in fig.208, 209, 211 ducta pariter *md* parallela eidem AB, quæ occurrat in *d* rectæ VA, jacente *md* in fig.208 intra triangulum VMD, in fig. 209 extra ad partes MD, in fig.211 extra ad partes V, concipiatur circulus rectam AV contingens in M, ac tranſiens per D (is duci poſſet, ſed vitandæ confuſionis gratia non ducitur), qui a recta I*i* tranſeunte per contactum M abſcindet ſegmentum ME ita, ut ducta DE, angulus MED æquetur (Coroll. 6. Prop.9. Geom.) angulo, quem chorda MD continet cum ipſa tangente AMV ad partes oppoſitas, adeoque angulo M*a*R, qui in fig.208 æquatur angulo AMD, in reliquis angulo VMD externo, & oppoſito. Cumque etiam EMD æquetur alterno MR*a*, ſimilia erunt triangula *a*RM, EMD, ac *a*R ad RM, ut ME ad MD.

567. Eſt autem præterea in fig.210, ob MR, D*b* pa-

Db parallelas, MD æqualis R*b*. Erit igitur ibi *a*R ad RM, ut ME ad R*b*, adeoque rectangulnm *a*R*b*, ſive quadratum ſemiordinatæ RP æquale rectangulo ſub aſciſſa MR, & recta conſtanti ME, adeoque (num.440) puncta P, *p* ad Parabolam diametro MI parametro ME deſcriptam.

568. At in reliquis erit præterea R*b* ad R*m*, ut MD ad M*m*. Quare conjunctis rationibus, rectangulum *a*R*b*, ſive quadratum ſemiordinatæ RP ad rectangulum MR*m* ſub binis abſciſſis a binis verticibus, ut rectangulum ſub ME, & MD ad rectangulum ſub M*m*, & MD, ſive in conſtanti ratione ME ad M*m*, adeoque (num.439) puncta P, *p* erunt in fig.208, 209 ad Ellipſim, in fig.211 ad Hyperbolam deſcriptam diametro M*m*, & parametro ME.

Coroll. 8.

569. *In Ellipſi, & Hyperbola diameter conjugata diametri* Mm *eſt media geometrice proportionalis inter* MD, md.

570. Erit enim *md* ad M*m*, ut R*a* ad RM, ſive ut ME ad MD; adeoque rectangulum ſub *md*, & MD æquale rectangulo *m*ME ſub diametro & parametro, nimirum (num. 351.) quadrato diametri conjugatæ.

Coroll. 9.

571. *Si planum* AVB *fuerit perpendiculare plano baſis, quod in cono recto contiget ſemper, in cono ſcaleno in unica directione diametri* AB, *erit* IMi *axis, & quidem in Hyperbola* Mm *ſemper in eo caſu erit axis tranſverſus, in Ellipſi in cono recto pariter ſemper tranſ-*

 ver-

verſus, in cono vero obliquo erit tranſverſus, vel conjugatus, prout ſectio jacuerit inter ſectionem parallelam baſi ductam per M, *&* *ſubcontrariam, vel extra earum angulum*,

572. Si enim planum AVB fuerit perpendiculare plano baſis, recta OS jacens in plano baſis, & perpendicularis per coſtructionem interſectioni AT plani AVB cum ipſa baſi, erit (n.66 ſolid.) perpendicularis illi ipſi plano, adeoque & rectæ VT. Quare & ordinata P*p* erit perpendicularis diametro M*m*, adeoque M*m* (num. 210) erit axis.

573. Cum vero in cono recto axis coni per C tranſiens ſit perpendicularis plano baſis, quodvis planum AVB tranſiens per V & C, adeoque per axem coni, erit (num. 62. ſolid.) perpendiculare plano baſis. At in cono ſcaleno perpendiculum ex V demiſſum in planum baſis cadet extra C, adeoque in ea unica directione, in qua diameter AB tranſiens per C dirigatur ad id punctum, planum AVB tranſibit per rectam perpendicularem plano baſis, adeoque ipſi perpendiculare erit.

574. Porro in Hyperbola axis conjugatus ipſius perimetro nuſquam occurrit (num.212), adeoque cum ipſi occurrat M*m* in M, & *m*, erit axis tranſverſus.

575. Pro Ellipſi vero ſi fig. 212 exhibeat triangulum AVB pro caſu coni recti, fig. 213,
F. 212 214 pro caſu coni ſcaleni, quod in illa erit
213 (num. 550) iſoſceles, in hac ſcalenum, circulus
214 MED in primo caſu continget etiam latus VB

in

in D, in ſecundo ipſum ibi ſecabit, ac iterum ſecabit pariter alicubi in L verſus B, vel verſus V, prout latus VA, in quo jacet M, fuerit majus latere VB, ut in fig. 213, vel minus, ut in fig. 214. Si enim ejus circuli centrum ſit O, ductis MO, DO, angulus OMD erit æqualis angulo ODM ob latera OM, OD æqualia, cumque & latus VM ſit in fig. 212 æquale lateri VD, in fig. 213 majus, in fig. 214 minus; erit angulus VDM æqualis in fig. 212 angulo VMD, major in fig. 213, minor in fig. 214, ac proinde totus angulus VDO æqualis angulo recto VMO in fig. 212, major in fig. 213, minor in fig. 214; Quamobrem recta quoque VDB continget circulum in fig. 212, ipſum in reliquis ſecabit alicubi in L, jacente L ad partes anguli acuti radii OD cum recta VD, nimirum in fig. 213 a D verſus B, & in fig. 214 verſus V.

576. Hinc in fig. 212 ducta quavis Mm, quæ lateri VB occurrat ab V verſus B, vel ſupra MD, ut $Mm1$, vel infra ut $Mm2$, ſemper ea prius occurret circulo in E1, vel E2, eritque ſemper axis Mm major latere recto ME, adeoque multo major (num. 351) altero axe, & proinde erit axis tranſverſus. At in fig. 213, 214; ubi m abierit in L, fient Mm, ME æquales abeunte in L etiam E, quo caſu æquabuntur axis, & ejus latus rectum, adeoque bini axes, Ellipſi abeunte in circulum juxta num. 109, qui quidem caſus pertinet ad ſectionem ſubcontrariam ob angulum MLD æqualem angulo LMD in fig. 213, & AMD in fig. 214 tangentis cum chorda MD referente ſectionem baſi parallelam, Quare quævis $Mm2$ jacens inter MD,

ML occurret prius lateri VB, quam circulo ultra ipſum procurrenti, eritque axis $Mm2$ minor ſuo latere recto ME2, adeoque & axe altero. Quævis autem jacens extra eos limites, ut $Mm1$, $Mm3$, erit major ſua ME, & proinde intra eos limites erit Mm axis conjugatus, extra eos tranſverſus.

Coroll. 10.

577. *Ex quovis cono abſcindi poteſt quævis data Ellipſis, ac Parabola, plurimæ itidem Hyperbolæ licet non omnes, ac ex cono recto nulla poteſt ex iis, in quibus latus rectum principale ad axem tranſverſum habeat rationem majorem, quam tangens dimidii anguli* AVB *in vertice conſtituti ad cotangentem, ſive, quod eodem redit, in quibus axis conjugatus ad tranſverſum habeat rationem majorem, quam tangens ejuſdem dimidii anguli ad radium, reliquæ omnes poſſunt.*

578. Nam primo quidem in fig. 212 ſecto cono utcumque per axem plano AVB, & aſſumpto puncto M ad arbitrium, capiatur VD æqualis VM, ducatur circulus tangens AV in M, & tranſiens per D, capiatur MF ad MV in ea ratione, in qua eſt in data Ellipſi latus rectum principale ad axem tranſverſum, quod cum ſemper ſit minus ipſo latere tranſverſo (n.66, 64) erit ſemper MF minor, quam MV, adeoque acta ex F recta parallela VB, ea neceſſario occurret alicubi circulo in binis punctis E1, E2, cum ipſa VB illum tangat (num. 575). Si autem ducantur rectæ ME1$m1$, ME2$m2$, ipſæ determinabunt ſectiones ſimiles datæ Ellipſi; erit enim in iis latus

tus tranſverſum Mm ad rectum ME, ut MV ad MF, nimirum ut in data Sectione Conica latus tranſverſum ad rectum. Quare ſi alter ex iis axibus Mm evaſerit æqualis axi tranſverſo datæ Ellipſeos, ſectio per ipſum ducta perpendicularis plano AVB exhibebit Ellipſim datam; ſi neuter, ſatis erit aſſumere in ipſo latere AV aliam VM, quæ ad prius aſſumptam ſit, ut eſt axis tranſverſus datæ Ellipſeos ad $Mm1$, $Mm2$ prius inventas; & ſectio per novum punctum M parallela ductæ per priorem $Mm1$, vel $Mm2$ exhibebit quæſitam Ellipſim. Erit enim (num. 555) priori ſectioni ſimilis, ac ejus axis tranſverſus ad Mm prius inventam, ut nova VM ad priorem.

579. Quod ſi agatur ME3 parallela VB, ea determinabit Parabolam, in qua ſi latus rectum non obvenerit æquale lateri recto datæ Parabolæ, eodem artificio mutata VM in ea ratione, invenietur Parabola æqualis datæ.

580. Si demum acta diametro DOI, tangens per I occurrat lateri VA in H, & detur Hyperbola, in qua latus rectum principale ad axem tranſverſum habeat rationem utcumque minorem, quam HM ad MV, ſumatur Mf ad ipſam MV ad partes oppoſitas V, ſive verſus H in ratione ejus lateris recti principalis ad axem tranſverſum, & recta ex f paralella VB eodem pacto determinabit bina puncta E4, E5, ex quibus ductæ binæ Em determinabunt binas Sectiones ſimiles Hyperbolæ datæ, in qua ſi illa ratio lateris recti principalis ad axem tranſverſum fue-

rit eadem, ac HM ad MV, coeuntibus punctis E4, E5 in I, ſectio per I, & M ducta exhibebit Hyperbolam ſimilem, ſi ratio fuerit adhuc major, patet ſimilem exhiberi non poſſe. Mutato igitur puncto M, ut prius, invenietur quidem Hyperbola æqualis datæ in duplici inclinatione in primo caſu, unica in ſecundo, at in tertio inveniri nequaquam poterit.

581. Porro quoniam ob tangentes HI, HM, & VM, VD æquales, rectæ OH, OV ſecant bifariam angulos IOM, MOD; angulus HOV erit æqualis binis IOH, VOD, qui cum ipſo conſtituunt binos rectos, adeoque erit rectus, & angulus MOV, qui ob OMV rectum, eſt complementum anguli MVO, erit complementum MOH, adeoque ipſe MOH æqualis illi MVO dimidio totius AVB. Cum igitur ſint HM, MV tangentes angulorum HOM, MOV, erit illa tangens, hæc cotangens dimidii anguli AVB, & Hyperbolæ, quæ non poterunt ſecari ex dato cono recto, erunt eæ, in quibus latus rectum principale ad tranſverſum habet rationem majorem, quam tangens illius dimidii anguli ad cotangentem. Quoniam vero ob ſimilitudinem triangulorum rectangulorum HMO, OMV, eſt HM ad MO, ut MO ad MV, & eſt latus rectum principale ad axem conjugatum, ut hic ad tranſverſum; ſi axis conjugatus habuerit ad tranſverſum rationem majorem, æqualem, vel minorem reſpectu ejus, quam HM tangens dimidii anguli AVB ad radium MO, habebit pariter latus rectum principale ad latus tranſverſum rationem majorem, æqualem, vel

mi-

minorem reſpectu ejus, quam habet tangens HM ad cotangentem.

582. In cono autem ſcaleno ſi AVB in fig.213 & 214 referat ſectionem per axem, quæ ſit perpendicularis baſi, eodem prorſus argumento haberi poterit quævis Ellipſis ſemper duplici inclinatione Mm1, Mm3, ac ſi concipiatur *bi* parallela lateri VB, quæ tangat in *i* arcum LD ſitum extra angulum AVB, & ratio axis tranſverſi ad conjugatum fuerit minor ratione M*b* ad MV, vel ei æqualis, poterit eadem illa Ellipſis erui ex eodem cono binis directionibus ME2, hinc & inde ab *i*, vel unica, qua E abeat in *i*. Poterit ſemper Parabola directione ME4 parallela leteri VB; tum ſuccedent omnia Hyperbolarum genera uſque ad eam, cujus latus rectum principale ad tranſverſum ſit ut MH ad MV. Quod ſi AVB non referat ſectionem baſi perpendicularem, ſed aliam quamcumque, definiri pariter poterunt limites rationis, quam habebit latus rectum cujuſpiam alterius diametri ad ſuam diametrum, ita tamen, ut cum nec angulus V, nec inclinatio trianguli AVB ad baſim variari poſſint, niſi intra certos limites, ſemper certus in quovis cono habeatur limes pro hyperbolis.

Coroll. II.

583. *Data quavis Sectione Conica inveniri poſſunt infiniti coni, ex quibus ea abſcindi poſſit; qui tamen ad Hyperbolam æquilateram abſcindendam habere debent in cono recto angulum ad verticem V rectum, vel acuto majorem.*

584. Nam

584. Nam quævis Ellipſis & Hyperbola abſcindi poſſunt ex quovis cono. Data autem quavis Hyperbola, ſi ſupra quamvis rectam AB in fig. 212 fiant anguli VAB, VBA inter ſe æquales, & non minores eo, cujus cotangens ad radium eſt, ut ejus Hyperbolæ axis coniugatus ad tranſverſum, tum diametro AB deſcribatur circulus in plano perpendiculari ad planum AVB & aſſumpto V pro vertice, ac eo circulo pro baſi, fiat conus; ex eo ſemper abſcindi poterit ejuſmodi Hyperbola. Cum enim bini anguli VAB, VBA ſimul cum AVB contineant binos rectos, ſinguli ſunt complementa dimidii anguli AVB, & eorum cotangens erit hujus dimidii tangens. Quoniam vero tangens anguli ſemirecti æquatur radio (num. 49. Trigon.), & anguli minoris eſt minor, majoris major; ut æquilatera eſſe poſſit Hyperbola, debebit dimidium anguli AVB non eſſe minus ſemirecto, adeoque is totus non eſſe acutus.

SCHOLIUM II.

585. Atque hoc pacto jam habentur præcipua eorum, quæ ad conorum ſectiones pertinent, & notari facile poteſt affinitas, quam habent inter ſe, & cum recta; ac mutua tranſformatio in ſe invicem, & in rectas, ei ſimilis, quam perſecuti ſumus in Scholio 2 poſt Coroll. 20 defin. 2. a num. 107. Concipiatur in fig. 212 punctum M immotum, dum punctum m primo abit in V, Ellipſi eo caſu in infinitum attenuata, area eva-

evaneſcit, ac ejus perimeter abit utrinque in rectam MV. Inclinata Sectione verſus D in Mm1, habetur Ellipſis initio quidem tenuiſſima, & formæ admodum oblongæ exiſtente ratione lateris recti ME1 ad tranſverſum Mm1 admodum exigua, tum ſenſim pingueſcit, ac ubi m1 abit in D, æqualibus latere recto, & tranſverſo, migrat in circulum: tum in Mm2 redit ad formam iterum oblongam, ac iterum decreſcit ratio lateris recti ME2 ad tranſverſum Mm2 per omnes gradus in immenſum, donec abeunte E2 in E3, vertex m ita in infinitum recedat, ut nuſquam jam ſit, ac Ellipſis in Parabolam migret, nuſquam in ſe redeuntem. Inclinato autem adhuc magis, utcunque parum, plano ſectionis per E4M, jam incipit vertex m4 apparere ex parte oppoſita V, initio quidem in immenſa diſtantia ita, ut nulla ſit diſtantia in ſe determinata ejuſmodi, quæ cuipiam determinato puncto E4 non reſpondeat, qua proinde majores aliæ antea non extiterint reſpondentes aliis punctis E4 adhuc propioribus puncto E3: Parabola autem jam in Hyperbolam migrat binos habentem ramos utrinque in infinitum productos, in qua ratio lateris recti ME4 ad tranſverſum Mm4 initio in immenſum exigua ſenſim creſcit dilatata Hyperbolæ forma, donec abeunte E4 in I, fiat maxima illa ratio: tum iterum eadem in E5 decreſcit, & comprimuntur Hyperbolæ, ac demum evaneſcente ME5, & abeunte m5 in V, deſinit Hyperbola in rectam, ab M verſus A, & V ad partes oppoſitas in immenſum productam.

586.Idem

586. Idem contingit in fig. 213, & 214 in cono ſcaleno cum hoc ſolo diſcrimine, quod ubi Ellipſis primo oblonga per $Mm1$ perpetuo pingueſcit, ac abit in circulum in ipſo appulſu $m1$ in fig.213 ad D, in fig. 214 ad L dilatatur adhuc magis, facto $Mm2$ jam axe conjugato, tum iterum ad formam circularem redit abeunte m in fig.213 in L, in fig.214 in D, ac deinde oblongatur in immenſum, dum in Parabolam deſinat, ac ad Hyperbolam tranſeat primo quidem ſe veluti expandentem, tum iterum compreſſam, donec abeat in rectam. Ac in omnibus hiſce caſibus Ellipſis, ac Hyperbola, ubi in rectas deſinunt, id præſtant axe tranſverſo finito, & latere recto evaneſcente, ac perimetro utrinque abeunte in axem, dum & axe excreſcente in immenſum, & latere recto finito, in Parabolam migrant. Poſt omnes Ellipſium, ac Hyperbolarum ſpecies adſtringentium formam ita, ut ratio lateris recti ad tranſverſum decreſcat ultra quoſcumque limites, bini ſunt velut limites quidam, recta linea, & Parabola, quæ quodammodo velut ejuſdem ſunt ultimæ ſpeciei, & ad alteram devenitur axe tranſverſo finito; & latere recto evaneſcente, ad alteram finito latere recto, & axe tranſverſo excreſcente in infinitum. Utcumque parum quædam Ellipſis, & Hyperbola a recta diſtent, & formam adſtringant, habent ſectionem aliam, Parabolæ pariter proximam, majorem quidem, ſed formæ prorſus eiuſdem, atque ipſi omnino ſimilem.

587. Quod

587. Quod ſi manente directione ſectionis, concipiatur punctum M accedere ad V, tam Ellipſis, quam Parabola, & Hyperbola, eandem retinent formam, juxta (num.555), ſed perpetuo decreſcunt, donec abeunte M in V Ellipſis ut patet in fig.208, 209 abeat in unicum punctum V, Parabola in fig.210 in rectam VT, Hyperbola in fig.211 in binas rectas VO, VS utrinque in infinitum productas juxta num.550. F.208 209 210 211

588. Si manente baſi, & plano ſectionis, vertex V moveatur per rectam VT, ac deſinat in T, Ellipſis quidem in fig.208, 209, coeuntibus punctis M, *m* deſinit in rectam perpendicularem rectæ CT conſideratam ut duplicem interceptam tangentibus ex T ductis ad baſim, abeunte ſuperficie coni in omne illud ſpatium, quod eæ tangentes utrinque in infinitum productæ continent. Parabola in fig.210 deſinit in unicam ſimplicem rectam itidem perpendicularem CT indefinite productam hinc, & inde, abeunte coni ſuperficie in totam aream baſis hinc inde a tangente OS indefinite productam. Hyperbolæ in fig.211 ramus uterque abit in eandem unicam rectam eodem modo in infinitum productam, & conſideratam ut duplicem ita, ut in eam totam ſinguli abeant rami, abeunte pariter utraque coni ſuperficie in planum baſis indefinite productum.

589. Quod ſi punctum V recedat a baſi in infinitum per eandem rectam ita, ut nuſquam jam ſit, conus quidem deſinit in cylindrum, at Ellipſis formam Ellipſis retinet, Parabolæ in fig.210,

ac

ac Hyperbolæ fig. 211 vertex V nuſquam jam eſt, perimeter vero abit in binas rectas parallelas, quæ ſunt ipſa cylindri latera. Atque eodem pacto liceret plurimas alias transformationes contemplari. Quod vero ad cylindrum attinet, jam hinc inferri poteſt quamvis ſectionem axi parallelam efficere in ejus ſuperficie binas rectas, quamvis parallelam baſi, vel in cylindro obliquo ſubcontrariam efficere circulum baſi æqualem, quamvis aliam efficere Ellipſim. Sed ea, ut & pauca alia, quæ ad cylindri ſectiones pertinent, libet potius per finitam Geometriam accurate demonſtrare, quod utique præſtari poterit fere eadem prorſus methodo, qua in cono uſi ſumus.

DEFINITIO IV.

590. *Si recta* Nn *in fig.* 215 *utrinque indefinita ſemper parallela datæ cuipiam rectæ poſitæ extra planum dati circuli* AB *perpetuo percurrat ejuſdem circuli peripheriam, ſuperficiem, quam generat,*
F.215 *dico* Superficiem Cylindricam, *ſolidum ea incluſum, dico* Cylindrum, *circulum ipſum* Baſim; *rectam* VCu *per centrum baſis ductam, & datæ illi rectæ parallelam dico* Axem, *qui ſi fuerit perpendicularis plano baſis, Cylindrum dico* rectum, *ſecus* obliquum, *rectam vero illam mobilem dico* Cylindri Latus.

SCHO-

SCHOLIUM I.

591. HIc pariter Cylindrum appellavi totum locum geometricum, qui natura ſua in infinitum utrinque producitur, licet plerunque Cylindri nomine deſignari ſoleat hujuſmodi Cylindri ſegmentum tantummodo binis planis parallelis terminatum.

Coroll. 1.

592. *Cylindrus rectus generatur, ſi altero e binis oppoſitis rectanguli lateribus utrinque in infinitum producto totum rectangulum circa latus alterum immotum convertatur.*

593. Nam utrumvis e reliquis binis lateribus cum lateri immoto perpendiculare ſit, deſcribet (num. 30 ſolid.) circulum perpendicularem ipſi lateri immoto, quod proinde erit axis Cylindri, cujus ille circulus eſt baſis.

Coroll. 2.

594. *Si Cylindrus quivis ſecetur utcumque plano per axem ducto, vel axi parallelo; ſectio in ejus ſuperficie generabit binas rectas axi parallelas utrinque in infinitum productas.*

595. Secabit enim baſim in quadam recta AB, ac ſi ſectio tranſeat per axem in ipſo plano ſectionis duci poterunt per A, & B binæ rectæ Q*q*, N*n* parallelæ eidem axi, ſin minus, interſectiones planorum VCA, VCB, cum ipſo ſectionis plano erunt binæ rectæ Q*q*, N*n* tranſeuntes per A,

A, & B, cum quibus debebit congruere recta mobilis, quæ ſuperficiem generat, ubi appellit ad puncta A, B.

Coroll. 3.

596. *Quævis ſectio baſi parallela erit circulus baſis æqualis, cujus centrum in ipſo occurſu axis cum eadem ſectione, ac Cylindri latera binis planis parallelis intercepta erunt æqualia inter ſe.*

597. Si enim ſectio baſi parallela occurrat axi in *c*; plano autem VCB baſis in recta CB, ei vero ſectioni in recta *cb*, erunt CB, *cb* parallelæ (num, 9. ſolid.), adeoque CB*bc* parallelogrammum, cujus latera oppoſita æqualia, & proinde *cb* ſemper æqualis eidem radio circuli CB, ac pariter & B*b* ſemper æqualis eidem C*c*.

Coroll. 4.

598. *Quævis ſectio parallela baſi, pro baſi aſſumi poterit.*

599. Patet ex eo, quod ſit circulus, & recta mobilis tam ipſum, quam baſim perpetuo conradat.

Coroll. 5.

600. *In Cylindro obliquo alia quoque ſectio baſi non parallela, quæ ſubcontraria dicitur, eſt circulus.*

601. Si enim in fig. 216 per axem VC duca-
F. 216 tur planum baſis plano perpendiculare, ſecans baſim in recta AB, ſuperficiem Cylindri in rectis

Qq,

Qq, Nn, angulorum qAB, nBA alter erit acutus, ut qAB, alter obtuſus, ut nBA. Quare ſi e quovis puncto M rectæ Qq ducta in eodem plano recta MD parallela diametro baſis AB, cui & æqualis erit, angulus AMm æqualis angulo BDM, occurrente ea recta lateri Nn in m, erit & MmD æqualis ipſi MDm, cum æquetur alterno AMm, & triangulum mMD iſoſceles. Porro ſi Cylindrus ſecetur per Mm plano perpendiculari ipſi AMDB, ea ſectio dicetur ſubcontraria, & erit circulus baſi æqualis.

602. Nam per quodvis punctum R rectæ Mm facta ſectione aPbp parallela baſi, quæ ſectioni priori occurrat in Pp, plano MABD in ab, erit ea (num. 596) circulus, cujus centrum in axe, adeoque diameter ipſa ab, eritque PRp interſectio binorum planorum perpendicularium eidem plano MABm perpendicularis ipſi toti, adeoque perpendicularis Mm, & ab, ac proinde chorda Pp bifariam ſecta a diametro ab in R, & quadratum PR æquale rectangulo aRb, nimirum, cum ob triangula MRa, mRb ſimilia triangulo DMm, adeoque iſoſcelia, ſit & MR æqualis Ra, & mR æqualis Rb, rectangulo MRm, quibus ſi ſecta Mm bifariam in c addatur quadratum cR, erunt bina quadrata cR, RP æqualia quadrato cR, & rectangulo MRm, nempe quadratum cP, quod ob angulum ad R rectum æquatur illis, æquale quadrato CM, quod ob Mm ſectam bifariam in c æquatur his, & punctum P ad circulum radio cM deſcriptum.

Coroll. 6.

603. *Quævis alia ſectio erit Ellipſis habens centrum in ipſo Cylindri axe.*

604. Nam ea non erit parallela axi, quem proinde ſecabit alicubi in fig. 217 in *c*, ut pa-
F.217 riter & omnia Cylindri latera, ac totam ejus perimetrum alicubi ſecabit in MP*mp*. Nec erit parallela baſi, cujus plano proinde alicubi occurret in recta quadam OS, ad quam ducto perpendiculo CT ex centro baſis, & per ipſum ac per axem ducto plano, id baſim ſecabit alicubi in AB, ſuperficiem Cylindri in rectis QA*q*, NB*n*, planum Sectionis in M*m*, jacente M*m* intra Cylindrum. Ductis in eo plano MD, *md* parallelis AB, adeoque & ipſi, & inter ſe æqualibus, per quodvis punctum R rectæ M*m* fiat ſectio parallela baſi, quæ erit circulus (uum.596), ac plano AM*m*B occurret in recta *ab* ſua diametro, plano autem MP*mp* in recta P*p*, quæ erit perpendicularis ipſi *ab*, cum rectæ P*p*, *ab* debeant eſſe parallelæ rectis CT, OS interſectionibus planorum parallelorum cum iiſdem planis, & CT, OS ſibi invicem perpendiculares ſint per conſtructionem.

605 Erit igitur P*p* bifariam ſecta in R, & quadratum PR æquale rectangulo *a*R*b*. Eſt autem *a*R ad MR, ut *md*, ſive MD ad M*m*, & R*b* ad R*m*, ut MD ad M*m*, adeoque rectangulum *a*R*b*, ſive quadratum RP ad rectangulum MR*m* in ratione conſtanti quadrati MD ad quadratum M*m*. Quamobrem erit MP*mp* Ellipſis, cujus diameter altera

tera *Mm*; adeoque (num. 351) ejus conjugata MD, quæ Ellipſis in circulum non abibit, niſi *Pp* ſit perpendicularis ipſi *Mm*, quod non accidet, niſi planum AM*m*B ſit perpendiculare plano *aPbp*, ſive plano baſis, & præterea M*m* ſit æqualis DM, nimirum niſi ſectio ſit ſubcontraria baſi. Patet autem M*m* ſecari bifariam ab *Vu*, ut AB, adeoque centrum eſſe in axe.

Coroll. 7.

606. *In Cylindro recto ſemper* Mm *erit axis tranſverſus; in cylindro vero obliquo ſi planum* AMmB *fuerit perpendiculare plano baſis, erit* Mm *pariter axis, ſed erit conjugatus, vel tranſverſus, prout ſectio jacuerit inter ſectionem baſi parallelam, & ſubcontrariam, vel extra eos limites.*

607. Nam quotieſcumque fuerit planum AM*m*B perpendiculare plano baſis, quod in Cylindro recto ſemper continget; erit OS perpendicularis MT, adeoque ordinatæ perpendiculares diametro M*m*, quæ proinde erit axis.

608. Porro in Cylindro recto angulus MD*m* erit ſemper rectus, & M*m* major, quam MD, adeoque axis tranſverſus. In Cylindro ſcaleno M*m* evadet minima, ubi fuerit perpendicularis lateri BD, tum in receſſu a perpendiculo hinc, & inde æque perpetuo creſcet, donec deveniat hinc ad MD parallelam baſi, inde ad ſectionem ſubcontrariam, ac deinde perget utrinque creſcere, adeoque erit minor vel major, quam MD, prout jacuerit inter MD, & ſectionem ſubcontrariam, vel extra eos limites.

Coroll. 8.

609. *E quovis Cylindro poteſt ſecari Ellipſis cujuſcunque ſpeciei, ſed in Cylindro recto ſemper ejus axis conjugatus debebit eſſe æqualis diametro baſis, ut etiam in Cylindro obliquo quotieſcunque fuerit ſectio perpendicularis plano per axem, quod perpendiculare ſit plano baſis, & jacuerit extra binas ſectiones circulares; ſi vero jacuerit intra, axis tranſverſus erit ſemper diametro baſis æqualis.*

610. Nam ſi fiat in Cylindro recto quævis ſectio per axem, & in obliquo ſectio per axem perpendicularis baſi, quæ ſit MABD, in qua ducatur e quovis puncto M recta MD parallela diametro baſis, tum capiatur recta, quæ ad ipſam ſit, ut eſt axis tranſverſus ad conjugatum in data Ellipſi, & centro M, eo intervallo neceſſario invenietur in recta BD ex utralibet parte puncti D, punctum *m*, ad quod ducta M*m*; tum ſecto Cylindro plano per M*m* perpendiculari ad MAB*m* habebitnr Ellipſis, cujus axis tranſverſus M*m* ad conjugatum MD erit, ut in data Ellipſi, adeoque erit ipſi ſimilis.

611. In Cylindro autem ſcaleno, ſi axis conjugatus non ſit ad tranſverſum in ratione minori, quam ſit ea ſinus anguli MAB ad radium, poterit etiam datæ Ellipſi ſimilis abſcindi Ellipſis etiam plano ducto inter binas circulares. Nam ubi M*m* ſit perpendicularis, adeoque minima, erit ad MD, ut ſinus anguli MD*m*, ſive MAB oppoſiti in parallelogrammo ad radium, ac centro M in-

M intervallo rectæ cujuſvis minoris quam ſit MD, ſed non minoris quam ſit id perpendiculum, invenietur vel unica Mm cum eo perpendiculo congruens, vel duplex hinc, & inde, quæ exhibebit axem conjugatum minorem tranſverſo MD in ea ratione, in qua eſt in data Ellipſi. Verum ſemper in primo caſu MD erit axis conjugatus, in ſecundo axis tranſverſus.

SCHOLIUM II.

612. SI in Cylindro obliquo planum MABm ſit obliquum ad planum baſis; adhuc & axis uterque haberi poterit inæqualis diametro baſis; erit enim tum Mm diameter quædam, & MD ejus conjugata, quarum utraque cum debeat eſſe (num. 379.) minor axe tranſverſo, major conjugato, habebitur axis conjugatus minor ipſa MD, tranſverſus major.

613. Quod ſi deſcribatur circulus, qui rectam AM contingat in M, & tranſeat per D, qui quidem occurreret diametro Mm in E eodem pacto, quo in cono demonſtratum eſt (num. 566, 568) demonſtrabitur hic, fore ME latus rectum diametri Mm, ut & illud patet ſectionem maxime inclinatam ad axem Cylindri eſſe maxime oblongam, tum creſcente angulo paullatim accedere ad circuli formam, & eam aſſequi demum ſemper in Cylindro recto in unica poſitione perpendiculari ad axem, in obliquo vero ſi planum AMmB ſit baſi perpendiculare, eam quidem primum aſſequi, tum adhuc magis contrahi, &

axem tranſverſum mutare in conjugatum, recedendo a forma circulari ſemper magis, donec perpendicularis evadat, tum incipiat interum ad eam formam accedere, ipſi iterum congruat, ac iterum per eoſdem gradus oblongetur in infinitum.

614. Poſſet etiam inquiri in mutationes omnes, quæ accidunt, ubi planum AMDB eſt inclinatum ad planum baſis: ſed quoniam ejuſmodi perquiſitio nec uſus habet ferme ullos, & prolixior eſt aliquanto, eam hìc omittendam duxi, ut & aliam ei ſimilem in cono ſcaleno: ac potius gradum faciam ad conſiderandas ſphæroides, ac conoides, quas Conicæ Sectiones generant circa axem revolutæ, earumque ſectiones uſui futuras ſæpe, ubi illud mirum *ex Ellipſoide ſecari non poſſe niſi circulum, & Ellipſim non magis a circulari forma recedentem, quam recedat Ellipſis genitrix; e Paraboloide poſſe circulum, Ellipſim, & Parabolam; ex Hyperboloide circulum, Ellipſim, Parabolam, & Hyperbolam non magis a forma Parabolæ recedentem, quam ipſa recedat Hyperbola genitrix*.

DEFINITIO V.

615. S*I circa axem utrumvis convertatur Ellipſis, ſolidum ea converſione ortum dico* Ellipſoidem, ſeu Sphæroidem Oblongam, vel Oblatam, *prout gyret circa axem tranſverſum, vel conjugatum: Si convertatur circa ſuum axem Parabola, dico* Paraboloidem, vel Conoidem Parabolicam, *ſi Hyperbola circa axem tranſverſum, dico* Hyperboloidem, *ſive* Conoidem Hyperboli-

cam;

cam; *axem autem illum converſionis dico* Axem *ipſius Sphæroidis, vel Conoidis, ac axis vertices* Polos.

Coroll. 1.

616. *Sectio Sphæroidis, vel Conoidis cujuſvis per axem æquatur prorſus figuræ genitrici, & ſectio axi perpendicularis eſt circulus habens centrum in ipſo axe,*

617. Si enim in fig. 218 ſit Sphærois Elliptica, in fig. 219 Conois Parabolica, in fig. 220 Conois Hyperbolica, & ſecetur plano per axem; ubi figura genitrix ad id planum deveniet, cum ea ſectione congruet, adeoque ei æqualis eſſe debet. F. 218 219 220

618. Si autem ſecetur plano PB*p* perpendiculari ad axem, cui occurrat in R, & ducantur bina quævis plana per axem MRP, MRB, quæ ipſi ſectioni occurrant in RP, RB, anguli MRP, MRB erunt recti, & proinde ubi figura genitrix ad ea plana deveniet, eadem ſemiordinata ipſius primum congruet cum RP, tum cum RB, adeoque ſemper quævis RB eidem RP æqualis eſt, & punctum B eſt ad circulum radio RB.

SCHOLIUM I.

619. Satis patet hoc Theorema eſſe commune cuivis ſolido genito rotatione figuræ planæ cujuſvis circa axem quemvis poſitum in eodem plano, nam demonſtratio non pendet a natura Sectionum Conicarum.

620. Ex hoc primo Corollario eruam pauca

quædam, quæ pertinent ad ſolidorum ejuſmodi relationem ad ſe invicem, ac ad dimenſionem Sphæroidum Ellipticarum ſummo futura uſui, quæ facile perſpiciuntur, & e ſimplici Cavalleriana methodo conſequuntur. Reliqua ſuo loco aptius demonſtrabuntur infiniteſimali methodo, ac calculo integrali. Prius tamen aliud Theorema ſponte fluens pro Ellipſoidibus deducam.

Coroll. 2.

621. *Circulus omnium maximus eſt in Sphæroide Elliptica is, qui habetur ſectione per centrum ducta, ac æque diſtat ab utroque polo, qui etiam ejus æquator dicitur, reliqui quo magis hinc, & inde ab eo diſtant, & ad polum propiorem accedunt, eo minores ſunt, ac bini hinc, & inde æque diſtantes æquales ſunt.*

622. Nam omnium ejuſmodi circulorum diametri ſunt rectæ Pp ordinatæ axi, quæ in quavis Ellipſi eo minores ſunt, quo a centro diſtant magis (num. 83), adeoque earum maxima eſt illa, quæ per centrum tranſit, & binæ, quæ hinc, & inde æque ab ipſo centro diſtant æquales ſunt per n. 83.

Coroll. 3.

623. *Si plures Ellipſoides, vel plures Paraboloides, vel plures Hyperboloides æqualem habentes axem inter ſe conferantur, earum ſegmenta planis æque a vertice diſtantibus abſciſſa, ac Ellipſoides totæ, annumerata Ellipſoidibus etiam ſphæra, erunt inter ſe ut earum latera recta pertinentia ad eundem axem, ſive in Ellipſoidibus, ac Hyperboloidibus ut quadrata axium reliquorum,*

rum, nimirum in Sphæroidibus Ellipticis, ut quadrata diametrorum æquatoris,

624. Nam quodvis planum circulare PB*p* erit, ut quadratum radii RP. Erit autem id quadratum ſemper in quavis Paraboloide æquale rectangulo ſub abſciſſa MR, & latere recto (num.351); at in Ellipſoidibus, & Hyperboloidibus ad rectangulum MR*m* (num.351) ſemper ut latus rectum ad tranſverſum, ſive in Ellipſoidibus, ac Hyperboloidibus, ut quadratum axis alterius ad quadratum axis M*m*. Quare ſi aſſumantur abſciſſæ MR æquales, ac præterea in Ellipſoidibus, & Hyperboloidibus ſint axes M*m* æquales, adeoque æquales & R*m*, & æqualia rectangula MR*m*; erunt ubique quadrata RP, ut latera recta, & in Ellipſoidibus inter ſe comparatis, ac Hyperboloidibus inter ſe, ut quadrata axium reliquorum, circa quos non fit converſio, qui axes in Sphæroidibus Ellipticis ſunt diametri æquatoris: cumque ea ratio habeatur ubique, utcumque mutato puncto R, erunt in eadem conſtanti ratione tota ſolida ab ejuſmodi circularibus planis genita, dum R excurrit per totum ſegmentum axis MR, & in Ellipſoide per totum axem M*m*.

SCHOLIUM II.

625. Hoc etiam Theorema generale eſt ſolidis omnibus genitis rotatione circa eundem axem a figuris, quarum ſemiordinatæ RP coſtantem ſemper rationem habeant, ut patet ex ipſa demonſtratione.

Co-

Coroll. 4.

626. *Sphærois Elliptica eſt ad ſphæram eodem axe deſcriptam, ut quadratum axis ipſius ad quadratum diametri æquatoris, & ſphæroides omnes ſunt inter ſe in ratione compoſita ex ſimplici axis, & duplicata æquatoris,*

627. Nam ſphæræ eodem axe deſcriptæ diameter æquatoris eſt axis ille idem. Si autem binæ ſphæroides diverſos axes habeant; erit prima ad ſphæram eodem axe deſcriptam in ratione duplicata diametri æquatoris primæ ad ejus axem, hæc ſphæra ad ſphæram habentem axem communem cum ſecunda in ratione triplicata axis primæ ad axem ſecundæ, hæc ſecunda ſphæra ad ſecundam ſphæroidem in ratione duplicata axis ſecundæ ad diametrum æquatoris ejuſdem. Collectis rationibus eliſa ratione duplicata directa, ac reciproca axis primæ ad axem ſecundæ, habetur ratio compoſita ex ſimplici axis primæ ad axem ſecundæ, & duplicata diametri æquatoris illius ad diametrum hujus.

Coroll. 5.

628. *Sphærois oblonga, ac oblata ab eadem Ellipſi genitæ ſunt mediæ geometrice proportionales inter ſphæram inſcriptam, & circumſcriptam.*

629. Nam inſcripta habebit pro axe axem conjugatum Ellipſeos, ſive axem ſphæroidis oblatæ, circumſcripta axem tranſverſum, ſive axem oblongæ. Quare erit ſphæra inſcripta ad ſphæroidem

dem oblatam, ut quadratum axis conjugati ad quadratum tranſverſi, & pariter ſphærois oblonga ad ſphæram circumſcriptam, ut idem quadratum axis conjugati ad quadratum tranſverſi. Erit igitur ſphæra inſcripta ad ſphæroidem oblatam, ut oblonga ad circumſcriptam; adeoque alternando ſphæra inſcripta ad oblongam, ut oblata ad circumſcriptam. Porro eſt etiam ſphærois oblonga ad oblatam in ratione compoſita ex ſimplici axis tranſverſi ad conjugatum, & duplicata conjugati ad tranſverſum, adeoque in ratione ſimplici conjugati ad tranſverſum, in qua ratione duplicata cum ſit ſphæra inſcripta ad ſphæroidem oblatam, erit oblonga media inter inſcriptam, & oblatam; adeoque ſphæra inſcripta, ſphærois oblonga, ſphærois oblata, ſphæra circumſcripta ſunt continue proportionales.

Coroll. 6.

630. *Sphæra ſphæroidi oblongæ æqualis habet pro diametro primam e binis mediis geometrice continue proportionalibus inter axem conjugatum Ellipſeos genitricis, & tranſverſum, ſphæroidi vero oblatæ ſecundam.*

631. Si enim concipiantur binæ mediæ continue proportionales inter axem conjugatum Ellipſeos genitricis, ſive diametrum ſphæræ inſcriptæ, & axem tranſverſum, ſive diametrum ſphæræ circumſcriptæ, quatuor ſphæræ, nimirum inſcripta habens pro diametro illum axem conjugatum, ſphæra habens pro diametro primam e binis mediis, ſphæra habens pro diametro ſecundam

dam, & circumſcripta; erunt & ipſæ continue proportionales, cum nimirum ſint in ratione triplicata diametrorum proportionalium. Quare cum etiam ſphæra inſcripta, ſphærois oblonga, ſphærois oblata, & ſphæra circumſcripta ſint continue proportionales, erit ſphærois oblonga æqualis ſphæræ habenti pro diametro primam, oblata ſecundam ex illis binis mediis continue proportionalibus.

SCHOLIUM III.

632. His demonſtratis pergendum jam ad reliquas Sphæroidum, & Conoidum ſectiones, quæ æque facile determinantur.

Coroll. 7.

633. *Quævis ſectio ſive Sphæroidis, ſive Conoidis non perpendicularis axi eſt Sectio Conica, in Ellipſoide ſemper Ellipſis; in Paraboloide Ellipſis, vel Parabola, prout ſectio fuerit obliqua axi, vel ei parallela; in Hyperboloide Ellipſis, Parabola, vel Hyperbola, prout ſectionis planum inclinabitur ad axem in angulo majori, æquali, vel minori reſpectu ejus, quo aſymptotus utervis ad ipſum inclinatur.*

634. Referat enim in fig. 221 HMI fruſtum
F.221 cujuſvis Sphæroidis, vel Hyperboloidis, & in
222 fig. 222 HMI, *hmi* pertineant ad binos ramos oppoſitos, & plano ſectionis cujuſvis PB*p* obliquæ ad axem, ducatur per axem ipſum perpendiculare (num.74 ſolid.) planum HMI, quod excindet Ellipſim, Parabolam, vel Hyperbolam genitrici

trici ſimilem (num.616), & occurret alicubi ſectioni priori in recta aliqua *Pp*, quæ nuſquam erit perpendicularis axi; nam ſi ipſa eſſet axi perpendicularis, totum planum PB*p* eſſet eidem axi perpendiculare (num. 66. ſolid.). Ipſa autem P*p* (num.149) Ellipſi occurret ſemper in binis punctis P, *p*, Parabolæ occurret ſemper in binis, præter caſum, quo planum ſit axi parallelum, quo caſu altero puncto *p* in infinitum recedente ita, ut nuſquam jam ſit, habebitur unicus occurſus P. In Hyperbola demum occurret bis eidem ramo, vel ſemel, altera interſectione ita in infinitum abeunte, ut nuſquam jam ſit, vel occurret ramis oppoſitis, prout inclinabitur ad directricem in angulo minore, æquali, vel majore, reſpectu anguli æqualitatis; nimirum, cum in ipſo angulo æqualitatis inclinentur aſymptoti (num.149), prout ad axem ipſi directici perpendicularem inclinabuntur in angulo majore, quam aſymptoti, vel æquali, vel minore.

635. Porro per quodvis punctum R rectæ P*p* ducto plano parallelo baſi, ſectio erit circulus habens centrum in axe (num. 616), adeoque in ipſa P'R*p'* interſectione figuræ genitricis HMI, & ejus interſectio BR*b* cum plano prioris ſectionis erit perpendicularis toti plano HMI, adeoque tam diametro circuli P'*p'*, quam rectæ P*p*, & proinde ſecta bifariam in R, & quadratum BR æquale rectangulo P'R*p'*. Ipſum autem rectangulum P'R*p'* in caſibus, in quibus *p* non recedit in infinitum, ad rectangulum PR*p* habet rationem datam (num. 299), manente nimirum P*p*, & directione chor-

chordarum $P'p'$; in caſibus vero, in quibus p nuſquam jam eſt, nimirum ubi PR eſt parallela axi in Parabola, vel aſymptoto utrilibet in Hyperbola, erit rectangulum $P'Rp'$, ut recta PR. Quare ſemper Pp erit diameter ſectionis $BPbp$, chordas omnes Bb eandem directionem habentes, eidem nimirum plano HMI perpendiculares ſecans bifariam, idque ita, ut in poſtremis hiſce caſibus, quorum alter ad Parabolam pertinet, alter ad Hyperbolam, ſint quadrata BR, ut abſciſſæ PR, & proinde (num. 440) ſectio ipſa Parabola, in cæteris omnibus quadratum BR ſit ad rectangulum PRp in data ratione, adeoque (num.439) ſectio Ellipſis, vel Hyperbola, prout R jacuerit, ut in fig.221. inter vertices P, p, quod ſemper accidet in Ellipſoide, in Paraboloide ſemper, præter caſum, in quo ſectio axi ſit perpendicularis, in Hyperboloide ſemper, ubi inclinatio ad axem habebitur in angulo majori, quam ad ipſum aſymptoti inclinentur, vel jacuerit ipſum R extra vertices P, p, ut in fig.222., quod continget, ubi angulus plani ſectionis cum axe fuerit minor.

SCHOLIUM IV.

636. HIc addemus dimenſionem ſolidi parabolici, quæ admodum facile ſimplici Cavalleriana methodo obtinetur.

Coroll. 8.

637. *Segmentum Conoidis Parabolicæ* PVp *in fig.223. abſciſſum per quamvis Ellipſim* Pp *æquatur*

tur dimidio cylindraceo circumſcripto, cujus baſis F.223
Ellipſis eadem, recti generans PA *æqualis, & parallela rectæ* RV, *quæ ex centro Ellipſeos ducitur parallela axi Parabolæ.*

638. Si enim ducatur recta V*p*, tum quævis ſectio parallela, quæ cylindraceum ſecabit in Ellipſi M*m* æquali, & ſimili Ellipſi P*p*, & Conoidem Parabolicam in Ellipſi N*n* pariter ſimili ipſi P*p*, ac rectas V*p*, VR in aliquibus punctis I, O, eritque Ellipſis P*p*, ſive M*m* ad Ellipſim N*n*, ut quadratum R*p* ad quadratum O*n*, ſive (num.351) ut VR ad VO, nimirum ut R*p*, ſive O*m* ad OI. Igitur cum O*m* ſit conſtans rectæ OI, O*m* exponent areas Ellipſium N*n*, M*m*, & ſolidum parabolicum genitum ab Ellipſi *n*N ad cylindraceum genitum ab Ellipſi M*m* erit, ut area deſcripta ab OI, nimirum triangulum RV*p*, ad aream deſcriptam ab M*m*, nimirum parallelogrammum RV*ap*, ſive ut 1 ad 2.

Coroll. 9.

639. *Conoides abſciſſæ planis parallelis erunt, ut quadrata abſciſſarum* VR.

640. Erunt enim ut baſes, & altitudines. Baſes erunt ut quadrata R*p*, ſive ut VR, altitudines iterum ut VR; quare erunt ut quadrata ipſarum VR.

SCHOLIUM V.

641. JAm perſequemur alia conſectaria Corollarii 7.

Coroll. 10.

642. *Recta* RP *erit ſemper axis ſectionis, & in Ellipſoide quidem oblata axis conjugatus, in oblon-*

oblonga, & in cæteris omnibus ſolidis axis tranſverſus.

643. Patet primum ex eo, quod diameter PR eſt perpendicularis ſuis ordinatis B*b*, adeoque
F.221 axis. Ubi autem chorda P*p* Hyperbolæ genitri-
222 cis terminatur ad binos ramos oppoſitos, ut in fig.222, patet ipſam fore axem tranſverſum, cum ſectionis perimetro occurrat in ipſis punctis P, *p*. At in fig.221 erit in caſu Ellipſoidis & Hyperboloidis quadratum axis P*p* ad quadratum axis alterius, ut rectangulum PR*p* ad quadratum BR, ſive ad rectangulum P'R*p*', nimirum (num.315) ut quadratum diametri curvæ genitricis parallelæ P*p* ad quadratum diametri parallelæ chordæ P'*p*', ſive ad quadratum axis tranſverſi in ſphæroide oblata, conjugati in oblonga, & Conoide Hyperbolica. Porro quævis diameter in Ellipſi eſt (num.379) minor axe tranſverſo, major conjugato. Quare in ſpheroide oblata erit axis P*p* minor altero axe, in oblonga major, adeoque ibi conjugatus, hic tranſverſus. At in Hyperbola diameter parallela chordæ P*p* erit (num.149, 212) ſemper diameter ſecundaria, quæ (num. 246) major erit axe conjugato, adeoque & axis P*p* major axe altero. At in Parabola rectangulum PR*p* ad rectangulum P'R*p*', ſive quadratum BR, erit (num.361), ut latus rectum diametri habentis pro ordinata chordam P*p*, ad latus rectum axis habentis pro ordinata chordam P'*p*'; cumque quodvis latus rectum ſit (num.359) majus latere recto principali in Parabola, erit ſemper rectangulum PR*p* majus quadrato RB, & proinde P*p* axis tranſverſus.

Co-

Coroll. 11.

644. *Ex quavis Sphæroide abſcindi poterit Ellipſis cujuſcunque ſpeciei, in qua ratio axium ab æqualitate non magis diſtet, quam in Ellipſi genitrice, & intra eas ſpecies cujuſvis magnitudinis habentis axem tranſverſum in oblata, conjugatum in oblonga non majorem axe ibi tranſverſo, hic conjugato Ellipſeos generantis. Ex quavis Paraboloide quævis Ellipſis & ſpecie, & magnitudine data, ſed Parabola ſoli genitrici æqualis: ex quavis Hyperboloide quævis Ellipſis & ſpecie, & magnitudine, ac quævis Parabola, Hyperbola vero cujuſcunque ſpeciei, in qua axis tranſverſus ad conjugatum non habeat rationem minorem, quam in genitrice, intra eas vero ſpecies quæcumque etiam magnitudine data, in qua axis conjugatus non ſit minor axe conjugato genitricis.*

645. Nam pro Ellipſoide facto centro in centro Ellipſeos genitricis in C in fig. 224, quæ exhibet ſphæroidem oblongam, vel 225, quæ exhibet oblatam, intervallo quovis nec minore, nec majore utroque ſemiaxe CM, CQ inveniri poterit punctum S, & ſectio per SCs habebit pro altero axe Ss, pro altero Qq, eritque Ss in priore caſu axis tranſverſus, in ſecundo conjugatus, ac ſectiones Pp ductæ per chordas quaſvis Pp parallelas Ss erunt ſimiles inter ſe, cum in fig. 221, & 222 manente directione plani BPb, maneat directio rectæ Pp, & proinde (num. 299) ratio rectanguli PRp ad P'Rp', ſive ad quadratum BR quæ (num. 351) eſt ratio duplica- F. 224 225

S ta

ta axium, adeoque erunt ſimiles ſectioni ductæ per Ss, & habebunt rationem axium Ss ad Qq. Sed axis Pp erit minor axe Ss (num.83). Data igitur quavis ſpecie Ellipſeos, in qua ratio axium non magis diſtet ab æqualitate, quam in Ellipſi genitrice, abſcindi poterit ejus ſpeciei Ellipſis, & intra eas ſpecies haberi non poterit Ellipſis, cujus ibi axis tranſverſus, hic conjugatus ſit major axe Qq ibi conjugato, hic tranſverſo Ellipſeos genitricis: quæ æqualem habeat, abſcindetur per Ss; quæ minorem, abſcindetur, ſi facta CV æquali ſemiaxi Ellipſeos datæ ibi conjugato, hic tranſverſo, ducatur VP ſemiordinata diametri Ss, tum Pp parallela axi ipſi Ss, quæ a diametro conjugata ipſius Ss, & parallela VP ita ſecabitur bifariam in R, ut ſit PR æqualis VC, adeoque Pp axis novæ ſectionis duplus CV, & æqualis axi dato.

646. Pro Paraboloide ſi AB in fig.226 ſit directrix Parabolæ genitricis, cui axis occurrat in
F.226 A, & ſumatur AD ad AM, ut eſt quadratum axis tranſverſi datæ Ellipſeos ad quadratum conjugati, ducaturque DI perpendicularis axi, donec occurrat ipſi Parabolæ in I, quævis ſectio facta per chordam Ss ordinatam diametro ductæ per I exhibebit Ellipſim datæ ſimilem. Si enim ea diameter directrici occurrat in B, erit ejus latus rectum quadruplum IB (num.351), ad latus rectum principale quadruplum AM, nimirum in fig.221. rectangulum PRp ad rectangulum P'Rp'; adeoque hic quadratum axis tranſverſi Ss Ellipſeos exſectæ ad quadratum axi conjugati, ut BI, ſive AD

AD ad AM, nimirum in ratione data, adeoque Ellipſis ejuſmodi ſimilis datæ. Quod ſi ipſa Ss ſuæ diametro occurrat in C, & capta CV verſus S æquali ſemiaxi tranſverſo datæ Ellipſeos, ſive ea ſit minor quam CS, ſive utcumque major, agatur VP parallela CB, donec occurrat Parabolæ in P, tum chorda PRp parallela Ss, erit ipſa dupla PR, ſive VC, nimirum æqualis axi tranſverſo datæ Ellipſeos, adeoque Ellipſis ſectione genita æqualis datæ.

647. At ſi PR in fig. 221 evadat in Paraboloide parallela axi, abeunte p in infinitum ita, ut nuſquam jam ſit, erit rectangulum $P'Rp'$, ſive quadratum BR æquale rectangulo ſub RP, & parametro diametri cujus $P'p'$ eſt ordinata, nempe parametro axis, vel lateri recto principali Parabolæ genitricis. Quare & ejuſmodi ſectio, quæ Parabola erit, habebit idem latus rectum principale, quod Parabola genitrix, & Ellipſis quidem quævis poterit ſectione Paraboloidis obtineri, ſive detur ſpecie tantum, ſive magnitudine, ſed Parabolæ omnes inde exſectæ erunt genitrici æquales.

648. Pro Hyperboloide ſi ſit Hyperbolæ genitricis axis tranſverſus Mm in fig. 227, conjugatus Qq, & centro C intervallo rectæ, quæ ad ſemiaxem conjugatum CQ ſit, ut axis tranſverſus datæ Ellipſeos ad conjugatum, inveniatur in Hyperbola conjugata punctum S (quod ſemper poterit tum hinc, tum inde a Q, cum axis tranſverſus ſit major conjugato in quavis Ellipſi, & omnium ſemidiametrorum conjugatarum minimus ſit in Hyperbola ſe- F.227

miaxis CQ); ducta SCs, per quamvis chordam PRp ipſi parallelam, habebitur Ellipſis datæ ſimilis, cujus nimirum axis conjugatus ad tranſverſum erit, ut Qq ad Ss, ac aſſumpta CV verſus S æquali ſemiaxi tranſverſo datæ Ellipſeos; ductaque VP parallela diametro CI conjugatæ ipſius SCs, tum chorda PRp parallela SCs habebitur Ellipſis æqualis datæ, ut prius, cujus nimirum axis tranſverſus æquabitur rectæ Pp.

649. Quod ſi jam quæratur ibidem Hyperbola datæ ſimilis; ſatis erit centro C intervallo rectæ, quæ ad CQ ſit, ut eſt axis tranſverſus datæ Hyperbolæ ad conjugatum invenire in Hyperbola PM punctum I, quod ſolum poterit, ſi ea ratio non ſit minor ratione Mm ad Qq; nam CM eſt minima omnium CI. Ducta vero quavis Pp' parallela Ri, ſectio per ipſam erit ſimilis datæ Hyperbolæ, cum debeat habere axem tranſverſum ad conjugatum, ut eſt Ii ad Qq. Porro quævis Pp' eſt major, quam Ii (num. 83, & 357), adeoque ſectionis per quamvis Pp' ductæ axis conjugatus erit major, quam Qq, ductæ autem per Ii erit æqualis, adeoque nulla Hyperbola exſecari inde poterit, cujus axis conjugatus ſit minor axe conjugato Qq Hyperbolæ genitricis, cui ſi æqualis ſit ſectio per Ii, rem abſolvet, ſi major utcunque, capta CR in CI producta æquali ſemiaxi tranſverſo dato, tum ducta Pp' parallela Ii, quæ erit dupla CR, adeoque æqualis axi dato, ſectio per ipſam erit ſimilis, & æqualis datæ Hyperbolæ.

650. Demum pro Parabolis exſecandis ex Hyperboloide, abeunte in fig. 221 p ultra quoſcumque

que limites ita, ut nuſquam jam ſit, erit latus rectum Parabolæ tertium poſt PR, & RB, ſive quartum poſt PR, RP', Rp'. Hinc ſi in fig.228. CD ſit aſymptotus, ad quam ducatur per focum F, recta FD parallela directrici AB, occurrens Hyperbolæ genitrici in V, *u*, quæ erit (num.54) ejus latus rectum principale, tum ſumatur DI in ea ad DF, ut eſt latus rectum principale datæ Parabolæ ad latus rectum V*u* Hyperbolæ genitricis, & ducta per I recta PR aſymptoto CD parallela, quæ occurrat Hyperbolæ genitrici in P, rectæ V*u* in I, ea determinabit Parabolam æqualem datæ. F.228

651. Si enim ducatur uſque ad directricem FA parallela aſymptoto DC, quæ occurrat perimetro in E, ea & erit æqualis dimidio lateri recto principali FV, vel F*u*, & erit ſecta bifariam in E. Nam ducta *u*B parallela eidem aſymptoto, erit æqualis ipſi FA lateri oppoſito parallelogrammi AF*u*B, & erit æqualis F*u*, cum ſit ducta ad directricem in angulo æqualitatis, in quo ad ipſam inclinantur aſymptoti, ac eandem ob rationem erit & FE æqualis EA, adeoque erit EF ad FV, ut F*u* ad totam V*u*, & rectangulum ſub EF, & V*u* æquale rectangulo VF*u*. Ducta autem quavis chorda P'R*p*' parallela V*u*, quæ occurrat rectæ PR intra Hyperbolam genitricem in R, aſymptoto in H; erit rectangulum VF*u* ad rectangulum P'R*p*' (num.305), ut rectangulum ſub EF, & FD ad rectangulum ſub PR, & RH, vel ſub PR, & DI, ſive pro FD, ID ſubſtitutis latere recto Hyperbolæ genitricis, & latere recto

principali Parabolæ datæ, erit rectangulum illud VFu ad P'Rp', ut rectangulum ſub FE, & Vu ad rectangulum ſub PR, & latere recto principali datæ Parabolæ, adeoque cum rectangulum VFu æquetur rectangulo ſub EF, & Vu, etiam rectangulum P'Rp' æquabitur rectangulo ſub PR, & latere recto principali datæ Parabolæ; adeoque eſt PR ad RP', ut Rp' ad latus rectum principale Parabolæ datæ: cumque ſit etiam PR ad RP', ut Rp' ad latus rectum principale Parabolæ provenientis ex ſectione, hæc Parabola erit æqualis datæ. Cumque DI ad DF aſſumi poſſit in quavis ratione; patet quamvis datam Parabolam ex quavis Hyperboloide haberi poſſe.

SCHOLIUM VI.

652. Hiſce Sphæroidibus, ac Conoidibus libet jam adnectere ſolidum genitum converſione Hyperbolæ circa axem conjugatum, in quo ſolido multa occurrunt notatu digniſſima, & ad Geometriæ indolem cognoſcendam ſane aptiſſima, ut permutatio quædam crurum ad oppoſitos Hyperbolæ ramos pertinentium ſatis elegans. Enunciabo autem unico velut hiatu quæcumque pertinent ad ſex diverſos caſus ſectionum hujus ſolidi, tum ſingula pro ſingulis caſibus demonſtrabo accuratiſſime.

Coroll. 12.

653. *Si Hyperbola convertatur circa axem conjugatum, generabit ſolidum, quod ſi ſecetur plano, cui accurat planum ipſius Hyperbolæ genitricis ad angulos rectos, & conſiderentur ſex poſitio-*

ſitiones rectæ, in qua planum ſectionis occurrit ei plano Hyperbolæ genitricis, ac in eorum primo recta ipſa ſit perpedicularis axi rotationis, ſive axi conjugato Hyperbolæ genitricis, in ſecundo ad ipſum inclinetur, ſed in angulo majore quam aſymptoti, in tertio ſit aſymptis parallela, in reliquis tribus inclinetur in angulo minore, quam aſymptoti, ſed in quarto ſecet ramum utrumlibet Hyperbolæ genitricis in eo plano jacentis, in quinto alterutrum contingat, in ſexto neutri accurrat, binis nimirum parallelis tangentibus interjecta, erit ſectio in primo caſu circulus, in ſecundo Ellipſis, in tertio Parabola, vel ſi planum tranſeat per alteram aſymptorum, binæ rectæ parallelæ, in quarto Hyperbola pertundens illud planum Hyperbolæ genitricis perpendiculare plano ſectionis, & habens in ipſo plano vertices axis tranſverſi, in quinto angulus rectilineus conſtans binis rectis utrinque indefinite protenſis, in ſexto Hyberbola illud planum Hyperbolæ genitricis non attingens, ſed ſingulos ſuos ramos efformans e binis cruribus reſpondentibus iis, quæ pertinebant in caſu quarto ad binos ramos oppoſitos ſingula ad ſingulos, conjunctis, & permutatis in tranſitu per caſum quintum, ac curvitate in oppoſitam plagam ibidem converſa. Et interſectioni illi, cujus ſex caſus conſiderantur, in caſu ſecundo, & quarto parallelus eſt axis tranſverſus ſectionis, qui nimirum æquatur chordæ Hyperbolæ genitricis, in ſexto, ubi nulla ejuſmodi eſt chorda, eidem parallelus eſt axis conjugatus, ac in illis ratio axis tranſverſi ad

conjugatum, in hoc conjugati ad tranſverſum, & in caſu quinto ratio radii ad tangentem anguli, quo recta ſectione obveniens inclinatur ad planum illud Hyperbolæ genitricis, eſt eadem ac ratio diametri parallelæ illi ipſi interſectioni, cujus ſex caſus conſiderantur, ad axem tranſverſum Hyperbolæ genitricis; adeoque ſectiones omnes curvilineæ planis parallelis factæ ſimiles erunt inter ſe, præter Hyperbolas caſus ſexti, quæ non erunt ſimiles Hyperbolis caſus quarti, ſed earum conjugatis; habebunt tamen omnes Hyperbolæ planis parallelis eductæ communem aſymptotorum inclinationem tam in caſu quarto, quam in ſexto, quæ erit eadem, ac rectarum caſus quinti. In primo vero caſu haberi poterit quivis circulus, cujus diameter non ſit minor axe tranſverſo Hyperbolæ genitricis, in ſecundo quævis cujuſcumque ſpeciei Ellipſis, cujus axis conjugatus non ſit minor axe conjugato ejuſdem Hyperbolæ genitricis, in tertio quævis Parabola, in quarto quævis Hyperbola & ſpecie, & magnitudine, cujus axis tranſverſus ad conjugatum non habeat rationem minorem, quam axis conjugatus Hyperbolæ genitricis ad tranſverſum, in quinto rectæ inclinatæ ad planum Hyperbolæ genitricis in quovis angulo, qui eum non ſuperet, quo aſymptoti ad axem conjugatum inclinantur, in ſexto quævis Hyperbola & ſpecie, & magnitudine, in qua axis conjugatus ad tranſverſum non habeat rationem minorem, quam in Hyperbola genitrice, & in qua axis tranſverſus axem tranſverſum Hyperbolæ genitricis non ſuperet.

654 Nam

654. Nam ſi Hyperbola HMD gyret circa axem conjugatum Qq in fig. 229, 230, 231, 232, 233, generabit ſolidum quoddam figuræ teretis; cujus ſectio quævis $P'Bp'$ perpendicularis ipſi axi erit circulus juxta (num. 619), cujus diameter erit chorda $P'p'$ Hyperbolæ genitricis, quæ cum ſemper debeat eſſe major axe tranſverſo Mm, omnium circulorum minimus erit is, qui habebitur ſecto ejuſmodi ſolido per ipſum axem MCm; ac proinde circulus habens minorem diametrum haberi non poterit; poterit autem habens æqualem, vel utcumque majorem, ex quo patent, quæ de primo caſu ſunt dicta. F.229 230 231 232 233

655. Secetur jam in fig. 229 idem ſolidum plano PBp ejuſmodi, ut planum $HDdb$ per axem tranſiens, & ipſius ſectionis plano perpendiculare occurrat ſectioni ipſi in recta Pp inclinata ad axem conjugatum Qq in angulo majore, quam ſit is, in quo ad ipſum inclinantur aſymptoti. Occurret recta ejuſmodi ramis oppoſitis (num. 149) in P, p, & ſi per quodvis ejus punctum R jacens inter P, p ducatur planum $P'Bp'$ perpendiculare plano axis, quod plano $HDdb$ occurret in recta $P'p'$, ac priori ſectioni in recta RB perpendiculari ad totum planum $HDdb$, adeoque ad $P'p'$, & Pp, hæc ipſa nova ſectio erit circulus habens pro diametro $P'p'$, & quadratum RB æquabitur rectangulo $P'Rp'$, quod ad rectangulum PRp erit (num. 315), ut quadratum axis tranſverſi Mm Hyperbolæ genitricis ad quadratum diametri Ss parallelæ chordæ Pp. Erit igitur conſtans ratio quadrati RB ad rectangulum F.229 234

lum PRp, adeoque PBp Ellipſis, cujus axis tranſverſus Pp, qui ad conjugatum erit, ut eſt diameter Ss ad axem tranſverſum Mm Hyperbolæ genitricis. Ejuſmodi Ellipſim exhibet fig. 234, & patet ſi directio rectæ Pp in fig. 229 ſit conſtans, conſtantem fore diametrum Ss ipſi parallelam, utcumque mutetur diſtantia ejus chordæ a centro C, adeoque conſtantem fore rationem axium in Ellipſi, & omnes ejuſmodi Ellipſes planis parallelis abſciſſas ſimiles fore. Si autem Ellipſis educenda & ſpecie, & magnitudine ſit data, nec in ea axis conjugatus ſit minor, quam axis tranſverſus Mm Hyperbolæ genitricis; factis, ut ibi Nn ad Pp, ita in fig. 229 CM ad CS applicandam centro C, uſque ad Hyperbolam genitricem HMD, quævis ſectio ducta per rectam Ss perpendicularis plano HDdb exhibebit Ellipſim datæ ſimilem, & capta in fig. 229 CV æquali PO fig. 234, ductaque VP parallela diametro Ii conjugatæ ipſius Ss, tum ducta POp chorda parallela Ss, patet eam fore duplam rectæ CV, & æqualem dato axi Pp figuræ 234, adeoque & Ellipſim ortam ſectione per Pp fore æqualem datæ, unde patet quidquid de ſecundo caſu eſt propoſitum.

656. Quod ſi jam fiat ſectio PBT per rectam PR
F.230 in fig. 230, parallelam aſymptoto Ss, erit (n. 328)
235 rectangulum P'Rp', ſive quadratum BR, ut recta PR, adeoque ſectio ipſa Parabola, quam exhibet fig. 235, quæ quidem ſi detur magnitudine, ſatis erit in recta per focum F ducta perpendiculari axi tranſverſo Mm, & occurrente Hyperbolæ genitrici

in

in V, *u'*, aſymptoto in S, aſſumere SL ad SF in ratione lateris recti principalis datæ Parabolæ ad axem M*m* tranſverſum Hyperbolæ genitricis, & ducere LPR parallelam aſymptoto S*s*. Nam ſi ducatur F*e* uſque ad perimetrum Hyperbolæ genitricis, ea juxta (num. 651) erit dimidia FV dimidii lateris recti principalis, cumque (num. 54) rectangulum MF*m* æquetur quadrato ſemiaxis conjugati CQ, cui (num. 66) æquatur etiam rectangulum ſub dimidio latere recto FV, & ſemiaxe tranſverſo MC, erit rectangulum MF*m* æquale rectangulo ſub F*e*, & toto axe tranſverſo M*m*. Eſt autem (num. 305) rectangulum MF*m* ad rectangulum P'R*p'*, ſive quadratum RB, ut rectangulum ſub F*e*, & FS ad rectangulum ſub RP, & LS, ſive pro FS, LS poſitis proportionalibus axe M*m*, & latere recto principali datæ Parabolæ, ut rectangulum ſub F*e*, & M*m* ad rectangulum ſub RP, & latere recto datæ Parabolæ: cumque rectangulum MF*m* æquetur rectangulo ſub F*e*, & M*m*; etiam quadratum RB æquabitur rectangulo ſub RP, & latere recto Parabolæ datæ, quod cum æquetur rectangulo ſub RP, & latere recto Parabolæ PBT, erit hoc latus rectum æquale lateri recto datæ Parabolæ, adeoque PBT datæ Parabolæ æqualis.

657. At ſi per ipſam aſymptotum S*s* tranſeat ſectio, efficiet duas rectas parallelas aſymptoto ipſi, & ab ea diſtantes hinc inde per intervallum æquale ſemiaxi tranſverſo CM. Nam ſi P'*p'* occurrat aſymptoto in *r*, & *ru* ſit occurſus plani P'B*p'* cum ſectione per aſymptotum ducta,

ducta, erit quadratum rn ſemper æquale rectangulo $p'r$P', adeoque ſemper æquale (num. 251) quadrato ſemiaxis CM; & proinde n ad rectam Nn parallelam aſymptoto diſtantem ab ea per intervallum CN æquale ſemiaxi CM; unde jam patet, quidquid etiam pro tertio caſu fuerat propoſitum.

658. Si autem recta ſectionem determinans inclinetur ad axem conjugatum in angulo adhuc
F. 231 minore, quam aſymptoti, vel eidem ramo
232 (num. 149) bis occurret, ut in fig. 231, in
233 duobus punctis P, p, vel eum continget in P, ut recta R'R in fig. 232, vel inter utrumque ramum tranſibit binis tangentibus parallelis interjecta, & neutri ramo occurrens, ut in fig. 233.

659. Ubi occurrit bis, qui eſt caſus quartus; per quodvis punctum R extra limites Pp ducta ſectione circulari, ductaque diametro SCs
F. 231 parallela ipſi Pp, erit (num. 315) rectangulum
236 P'Rp', ſive quadratum RB ad rectangulum PRp, ut quadratum Mm ad quadratum Ss, adeoque punctum B ad Hyperbolam, cujus axis tranſverſus Pp, ac is ad conjugatum, ut Ss ad Mm, quam exhibet fig. 236. Cumque ratio axis tranſverſi ad conjugatum maneat eadem, utcumque mutata diſtantia chordæ Pp a centro, dummodo directio maneat; patet, omnes ejuſmodi Hyperbolas fore ſimiles inter ſe. Sed cum quævis diameter ſecundaria Ss ſit (num. 246) major axe conjugato Qq; patet, in nulla ex ejuſmodi Hyperbolis axem tranſverſum ad conjugatum poſſe habere rationem minorem, quam habeat axis conjugatus Qq Hyperbolæ genitricis ad tranſ-

ver-

verſum Mm, quæ ratio ſi fuerit eadem, chordæ parallelæ axi conjugato Qq exhibebunt Hyperbolas ſimiles datæ; ſi major, centro C intervallo rectæ, quæ ad CM habeat rationem, quam in data Hyperbola habet axis tranſverſus ad conjugatum, inveniantur in Hyperbola conjugata Hyperbolæ genitrici puncta S, s, & chordæ Pp parallelæ diametro Ss exhibebunt Hyperbolas datæ ſimiles. Aſſumpta vero CV in ipſa Ss æquali ſemiaxi tranſverſo datæ Hyperbolæ, ac ducta VP ſemiordinata ipſius diametri Ss, & Pp parallela ipſi ordinata diametro Ii conjugatæ ipſius Ss, & ab ea ſecta bifariam in O, habebitur Pp dupla CV æqualis axi tranſverſo datæ Hyperbolæ, adeoque Hyperbola orta ſectione erit ipſi datæ Hyperbolæ æqualis; & hinc patent quæcumque ad quartum caſum pertinebant.

660. Pro caſu 5 in fig. 232 recta R′PR tangat Hyperbolam genitricem in P, & coibunt ibi puncta P, p, I, O: erit autem rectangulum P′Rp′, ſive quadratum BR ad quadratum tangentis PR in illa eadem ratione quadrati Mm ad quadratum Ss. Quare utcumque mutato puncto R erit ſemper PR ad RB, ſive ob angulum PRB rectum radius ad tangentem anguli RPB (num. 25. Trigon.) in conſtanti ratione Ss ad Mm, ac proinde angulus idem conſtans, omnia puncta B ad rectam tranſeuntem per P, & inclinatam ad planum HbdD in angulo, cujus tangens ad radium eſt, ut Mm ad Ss, quæ ratio non poteſt eſſe major ratione Mm ad Qq, adeoque recta IT non poteſt inclinari ad planum HDdb F.232 237

HD*db* in angulo majore, quam ſit is, in quo aſymptoti inclinantur ad axem conjugatum, quæ inclinantur ad illum in angulo, cujus tangens ad radium eſt, ut axis tranſverſus ad conjugatum. Cum vero idem contingat hinc, & inde a contactu P, ſectio ejuſmodi exhibebit binas rectas TT', *tt'*, quas exhibet fig. 237, & contactus P determinans ſectionem, in qua habetur data inclinatio rectæ ad ipſum planum HD*db* invenietur, invento puncto S, ut in caſu præcedente in Hyperbola conjugata ita, ut ſit CS ad CM, ut eſt tangens datæ inclinationis ad radium. Patent igitur etiam ea omnia, quæ ad quintum caſum pertinebant.

661. Demum pro caſu ſexto recta R'R in fig. 233, eadem directione, ac prius jaceat inter vertices I, *i* illius ejuſdem diametri IC*i*, cui occurrat in O. Per quodcumque ejus punctum R ubicumque aſſumptum agatur circulus P'B*p'*, habebitur ſemper aliqua RB, nimirum aliqua diſtantia ſectionis *t*NT a plano HD*db*, quod planum proinde ipſa non attinget. Quod ſi etiam per O ducatur ſectio circularis LN*l*, occurrens plano ſectionis prioris in ON, ducaturque per R ordinata GR*g* ad diametrum S*s* conjugatam ipſius I*i*, a qua bifariam alicubi ſecabitur in X, erit ut quadratum M*m* ad quadratum I*i*, ita rectangulum P'R*p'*, ſive quadratum RB ad rectangulum GR*g*, ut rectangulum LO*l*, ſive quadratum ON ad rectangulum IO*i*. Cumque ſit rectangulum GR*g* exceſſus quadrati XG ſupra XR, & rectangulum IO*i* exceſſus quadrati ſemidiametri

F.233 238

CI

CI minoris (num. 83) ſemiordinata XG, ſupra quadratum CO, vel lateris XR ipſi paralleli, erit ſemper rectangulum GRg majus rectangulo IO*i*, adeoque & quodvis quadratum BR majus quadrato ON, puncto N omnium ejus ſectionis punctorum maxime accedente ad planum HD*db*; differentia vero rectangulorum GR*g*, IO*i* erit eadem, ac differentia quadratorum XG, CI ob illas XR, CO æquales; adeoque, ſublatis proportionalibus, differentia quadratorum RB, ON ad differentiam quadratorum XG, CI erit, ut quadratum M*m* ad quadratum I*i*. Eſt autem, ut facile colligitur ex demonſtratis num. 86 translatis ad diametros, differentia quadratorum ſemiordinatæ XG, & ſemidiametri primariæ CI ad quadratum abſciſſæ CX in diametro ſecundaria, ſive ad quadratum OR ſibi parallelæ, & æqualis, ut eſt quadratum I*i* ad quadratum S*s*. Erit igitur ex æqualitate ordinata differentia quadratorum RB, ON ad quadratum OR, ut quadratum M*m* ad quadratum S*s*, adeoque punctum B ad Hyperbolam, cujus O centrum, ſemiaxis tranſverſus ON, ac axis ipſe tranſverſus ad conjugatum, ut M*m* ad S*s*. Si enim ejuſmodi Hyperbolam referat fig. 238, erit & ibi differentia quadratorum RB, ON ad quadratum OR, ut quadratum axis tranſverſi ad conjugatum, ac proinde captis OR ibi, & in fig. 233 æqualibus, ſemiordinatæ RB æquales erunt, & ſuperpoſitis punctis O, R congruent.

662. In ea autem Hyperbola jam non axis tranſverſus jacebit in illa recta R'R, ſed conjugatus, eritque tranſverſus N*n* in fig. 238, ipſi

per-

perpendicularis, ratio axis tranſverſi ad conjugatum erit eadem M*m* ad S*s*, quæ in caſu quarto erat ratio axis conjugati ad tranſverſum; adeoque cum Hyperbolæ conjugatæ axes permutent, erit ratio axis tranſverſi ad conjugatum in caſu ſexto eadem, ac in Hyperbolis conjugatis Hyperbolarum caſus quarti, & Hyperbolæ omnes caſus ſexti erunt ſimiles inter ſe, & ſimiles non ipſis Hyperbolis caſus quarti, ſed earum conjugatis; aſymptotos autem in eodem angulo habebunt inclinatas ad ſe invicem, & ad illos axes permutatos, cum tangens anguli quo ad alteram e rectis R'R, vel N*n* inclinantur dabeat eſſe eadem, ac erat in caſu quarto, & eadem ac in rectis caſus quinti. Ramus autem novus TBN*b't'* in fig. 238, coaleſcet e binis cruribus BT, *b't'*, quorum alterum in fig. 236 pertinebat ad ramum TBP*bt*, alterum ad ramum *t'b'p*B'T', & pariter ramus *tbn*B'T' fig. 238, e reliquis binis cruribus fig. 236, conjunctis nimirum verticibus P, *p* in caſu quinto in fig. 237 in O, in quo crura ipſa in aſymptotos abeunt, tum cruribus tranſgreſſis aſymptotos, diſtracto crure TB a *bt*, & conjuncto cum *b't'*, ac curvatura in oppoſitam partem obverſa.

663. Data autem Hyperbola fig. 238, ſi ejus axis tranſverſus N*n* non ſit ad conjugatum in ratione majore, quam in fig. 233 M*m* ad Q*q*, inventa CS, ut in caſu quinto, & quarto, quæ ſit ad M*m*, ut axis conjugatus datæ Hyperbolæ ad tranſverſum, diameter SC*s* exhibebit directionem ſectionis pro Hyperbolis datæ ſimilibus.

Quod

Quod ſi etiam N*n* in fig. 238 non excedat M*m* fig. 233, invenietur in hac punctum O, per quod tranſire debeat recta RR' exhibens Hyperbolam æqualem datæ. Nimirum capta CV perpendiculari ad I*i*, quæ ſit ad NO in fig. 238 datam, ut CI ad CM in fig. 233, centro V intervallo CI invenietur in ipſa CI punctum O quæſitum ex utralibet centri parte. Erit enim in fig. 233 quadratum CV differentia quadratorum VO, CO, ſive CI, CO, æqualis rectangulo IO*i*, quod ad rectangulum LO*l*, ſive quadratum ON eſt, ut quadratum CI ad quadratum CM, adeoque CV tam ad ON fig. 233, quam ON fig. 238, habebit rationem eandem, quam CI ad CM, ac proinde binæ ON, ſive bini axes tranſverſi ſectionis, & Hyperbolæ datæ erunt inter ſe æquales, & æquales ipſæ Hyperbolæ. Patent igitur etiam omnia, quæ ad ſextum caſum pertinebant.

SCHOLIUM VII.

664. ADmodum utile eſt illas transformationes locorum Geometricorum in ſe invicem, & in alia affinia conſiderare, ut innoteſcat Geometriæ indoles, quæ nihil inordinatum admittit, nihil abruptum per ſaltum. Conſideretur enim puncto P immoto in fig. 229, planum ſectionis cum recta PR converti motu continuo circa ipſum. Circulo, qui habetur, recta P'*p*' perpendiculari axi Q*q*, ſuccedit, ſectione inclinata, ſeries continua omnium ſpecierum Ellipſium, in quibus ratio axis tranſverſi ad conjugatum perpetuo

 cre-

creſcit, donec ea per omnes magnitudinis finitæ gradus progreſſa, jam Ellipſi ſuccedat Parabola fig. 230, in qua vertex *p*, centrum, axis conjugatus nuſquam jam ſunt; quæ tamen nequaquam eſſe deſinent, niſi ubi per omnes finitarum magnitudinum gradus receſſerint. Adhuc magis inclinata ſectione, jam ea habentur ex parte oppoſita, & in fig. 231, ramus naſcitur Hyperbolæ oppoſitus, cujus axis tranſverſus ad conjugatum rationem initio habet utcumque magnam, quæ ratio per omnes magnitudinum finitarum gradus ab infinito quodammodo redux cum ipſo vertice *p*, decreſcit decreſcente CS, donec ipſa CS evadat æqualis CQ, ubi nimirum ſit ipſa PO parallela axi conjugato Q*a*. Pergente converſione circa P, iterum creſceret ipſa ratio creſcente CS ex parte oppoſita axis CQ, donec coeuntibus P, *p*, jam Hyperbola abiret in rectas caſus quinti, ſed motu ipſo adhuc creſcente, & puncto P immoto non permutarentur ramorum crura, verum vertex quidem *p* tranſiret in arcum PD, & ratio axis tranſverſi ad conjugatum iterum creſceret in infinitum, donec facta P*p* alteri aſymptoto parallela, iterum haberetur Parabola, cui Ellipſium nova ſeries ſuccederet ad circuli formam accedens, ac in ipſam deſinens, in ipſo regreſſu rectæ P*p* ad præcedentem poſitionem, poſt quam iterum eodem ordine eædem ſeries evolverentur, ac ſemper circulus a ſe mutuo diſcerneret binas Ellipſium ſeries, in quarum altera creſceret in altera decreſceret ratio axis tranſverſi ad conjugatum, Parabola vero Ellipſes ab Hy-

Hyperbolis, inter quas Hyperbolas in medio veluti curſu rectilineus etiam angulus occurreret, in quem pluribus jam vicibus Hyperbolam mutari poſſe vidimus, & mutabitur ſemper, ubi axis tranſverſus evaneſcat, dum ejus ratio ad axem conjugatum expreſſa aliis lineis nec evaneſcit, nec in infinitum excreſcit.

665. At ſi potius manente directione ſectionis parallela eidem Ss, excurrat planum ipſum motu parallelo, in primo caſu habetur ſemper circulus, congruente quidem ſectione minimus, ſed ſemper ejuſdem formæ, ac pariter in ſecundo caſu habetur Ellipſium ſeries prorſus ſimilium, quarum minima in fig.229, quæ per ipſam Ss abſcinditur, nec in iis quidquam notatu dignum accidit. At in caſu Parabolæ in fig.230, quo magis recta PR ab aſymptoto recedit, eo augetur magis latus rectum, quo magis illa accedit, eo hoc decreſcit, & in primo caſu expanditur, in ſecundo contrahitur Parabola donec recta PR abeunte in aſymptotum, & evaneſcente SL evaneſcat latus rectum: ſed vertex ſimul in infinitum recedit ita, ut nuſquam jam ſit: quo caſu Parabola, quæ evaneſcente latere recto, & vertice adhuc alicubi exiſtente, abiret in axem ſuum, ut in eum abiit, ubi Coni Sectio (num.587) per verticem tranſiit, ac Conum jam contigit non ſecuit, in hoc caſu abit in binas rectas parallelas axi ſuo, qui in aſymptotum deſinit. Plano autem ſectionis adhuc progreſſo, vertex P, qui per omnes diſtantiarum finitarum magnitudines ita in infinitum receſſerat, ut nuſquam jam eſſet, ſtatim ex parte oppoſita *d*

enaſceretur quodammodo , & eodem ordine regrederetur ex infinito , aucto per eoſdem gradus latere recto : ubi notandum maxime illud , quo pacto crus BT , quod prius verſus T recedebat in infinitum ab axe , & verſus B recidebat in ipſum in P, paullatim ad axem ipſum ex parte T acceſſerit, & ad rectæ parallelæ formam , ut in tranſitu per aſymptotum deſereret demum ipſum axem ex parte B , & ei ex parte oppoſita conjungeretur, e priore illa in infinitum recedens.

666. In poſtremis autem caſibus multo major ſe prodit rerum viciſſitudo, ſed conſtans quædam Geometriæ indoles ubique regnat. Habentur in fig.231 , 236 bini Hyperbolæ rami, qui chorda accedente ad centrum , ad ſe accedunt, & ad aſymptotos, donec conjunctis punctis P, *p* in ipſas aſymptotos recidant, ut in fig.232 , 237, ac demum mira illa crurum permutatione, quam vidimus in fig.233. 238 tranſiliant ad partes aſymptotorum oppoſitas , nec curvaturam mutent, niſi in tranſitu per rectam; licet pariter ad rectam in caſu Parabolæ arcus appellens , illam tamen nequaquam mutaverit. Notandum autem, quo pacto crurum TB , *t'b'* puncta P, *p* in fig.231. paullatim ad ſe acceſſerint, nec coierint in fig.233. in unicum ramum , niſi poſteaquam ſe in ipſo centro O conjunxerint in fig.232 , & ibi veluti conglutinaverint arcus, quodammodo veluti relictis ſuis illis punctis P, *p*, quæ cum natura ſua indiviſibilia in partes dividi non potuerint , nec ſimul in oppoſitas directiones abire, relicta quodammodo ibi ſunt, ac punctis N , *n* , quæ pariter

immi-

nminuto axe conjugato devenerant ad centrum ', in eorum locum ſuffectis, arcus iidem ex cen-'o ipſo cum hiſce novis verticibus tranſgreſſi nt aſymptotos, & progreſſi. Nam puncta illa , *p* delata per rectam RR' nequaquam potue-:nt ſaltu quodam in Geometria abſurdo mutare rectionem, & per aliam rectam priori perpen-cularem progredi ſine ulla inflexione, ſed per ſdem vel regredi debuerunt, vel progredi, cu-modi regreſſuum, & progreſſuum exempla pluri-ı occurrunt in transformatione locorum geo-·tricorum. Et quidem puncta N, *n* fig.238 non e eadem, ac P, *p* fig.236: patet etiam ex eo, ɔd ratio axis N*n* ad ſuum conjugatum in illa n eſt eadem, ac in hac ratio axis P*p* ad ſuum ıjugatum, ſed relictis in fig.238 punctis P, *p* ·erticibus axis conjugati in eadem recta RR', ha-ur ratio N*n* ad P*p* utrobique eadem.

567. Sed de hiſce transformationum myſte-hic ſatis. Agemus de iis infra ordinatius, & dem Sectionum Conicarum proprietates admi-ilem ſane ejuſmodi permutationum, evolutio-ı, myſteriorum ſegetem ubique offerunt, quæ mum intimius rimantem jucundiſſima quadam templatione defigunt. Illud unum hic addemus, d nonnulli, ubi de Conicis Sectionibus agunt, are ſolent.

68. *Si recta gyret circa axem extra ejus um ſitum generat ſolidum, cujus ſectionibus icæ Sectiones exhibentur.*

59, Id patet in noſtro caſu, quia ſi recta F.230 ig. 230, connexa cum axe Q*q* per rectam 232

CN, vel recta PT, fig. 232 per rectam PC gyret, erit ſemper in eo ſolido, in quo eſſet, ſi tota figura converteretur circa axem Qq, nimirum in ſolido genito converſione Hyperbolæ circa axem conjugatum, cujus ſectiones vidimus eſſe Conicas Sectiones.

670. Datis autem binis rectis utcumque, altera pro axe, altera movenda circa ipſum, facile invenietur Hyperbola generans idem ſolidum. Sit prior recta Qq in fig.230, poſterior Nn. Ex quovis prioris puncto Q ducta Qa parallela datæ Nn, ad planum aQq, ex quovis ipſius Nn puncto n, ducatur nr perpendiculum in id planum, tum in eodem plano recta rS parallela aQ, quæ iccirco parallela erit etiam rectæ datæ nN, & cum ea non fuerit parallela Qq, aliter enim in eodem plano jacuiſſent, ipſa rS ſecabit alicubi in C datam Qq quantum opus eſt productam. Ducta CM perpendiculari ad Qq, & æquali rn, tum facto angulo MCS' æquali MCS per punctum M inter aſymptotos CS, CS' deſcribatur Hyperbola, quæ ſui converſione circa Qq generabit ſolidum idem, quod recta Sn. Erit enim CM ejus Hyperbolæ ſemiaxis tranſverſus, & recta Nn in plano Nnr perpendiculari ad planum Hyperbolæ genitricis parallela aſymptoto Ss, diſtabit ab eo per rn æqualem ſemiaxi tranſverſo.

671. Poſſent infinitæ aliæ Hyperbolæ inveniri, quæ ſolidum idem generarent: nec difficile eſſet etiam in fig.232, data recta PT, & aſſumpto in ea puncto P, ad arbitrium determinare in plano per P, & axem Qq ducto Hyperbolam HMD

ſD ejuſmodi, ut ducto per IT plano perpen-
ulari in illius planum, interſectio PE Hyper-
lam ejuſmodi contingeret in P. Sed prior illa
:erminatio ſatis oſtendit ſolidi illius geniti a
ta utcumque poſita ſectionem quamcumque
n Conicis Sectionibus congruere.

SCHOLIUM VIII.

2. SUnt ſolidorum genera, quorum ſectiones
quæcumque exhibent pariter Sectiones
icas eaſdem, quas huc uſque perſecuti ſu-
s, nimirum omnia genera corporum Conoi-
orum, vel Cylindraceorum, quæ oriuntur ex
verſione rectæ radentis non circulum, ſed
nam e tribus Conicis Sectionibus, Ellipſim,
abolam, Hyperbolam, & tranſeuntis per da-
punctum, vel delatæ motu parallelo, ſive
ora Conoidica, & Cylindracea, habentia
baſi non circulum, ſed unam e tribus Co-
; Sectionibus. Demonſtratio autem eſt eadem
, quæ pro cono, & Cylindro ſuperius eſt
bita. Nam in primis ſi in fig.206, 215 ba-
B ſit quævis Sectio Conica, recta vero *Cc* F.206
vis tranſiens ibi per illud punctum V, hic 215
llela rectæ gyranti; eadem demonſtratione
eri 553, & 596 erit ibi ſemper *cb*, ad CB,
ad CA, hic *cb* æqualis CB, & *ca* æqua-
A. Quare quævis ſectio baſi parallela erit F.208
milis baſi (num.111), hic etiam ipſi æqua- 209
Deinde in fig. 208, 209, 210, 211 ſi AB 210
ævis diameter baſis Ellipticæ, Parabolicæ, 211

vel Hyperbolicæ, & OS parallela ordinatis ejuſdem baſis, erit ſemper ab diameter ſectionis $aPbp$ parallelæ baſi, & Pp ejus ordinata ſecta bifariam in R; adeoque (num. 305) rectangulum PRp, ſive quadtatum PR, ad rectangulum aRb in ratione data. Erit autem ut in demonſtratione numeri 562, rectangulum aRb in fig. 210, ut MR, in reliquis, ut rectangulum MRm. Igitur erit quadratuw ſemiordinatæ PR ibi ut abſciſſa MR, hic ut rectangulum MRm, adeoque punctum P ubique ad Conicam Sectionem juxta num. 439, & 440. Eadem vero erit demonſtra-
F.217 tio pro Cylindraceis in fig. 217, ubi quadratum PR erit, ut rectangulum aRb, ſive ut rectangulum MRm. Quin immo ubicumque in iis ſolidis inter ſectiones haberi poterit & circulus: eædem ſemper erunt verſus conus, vel Cylindrus habens ipſum circulum pro baſi. Sed longum eſſet ſingulos caſus perſequi, & jam ad transformationes quaſdam locorum Geometricorum generaliorem faciemus gradum.

DE

DE TRANSFORMATIONE

OCORUM GEOMETRICORUM ;

Ubi de continuitatis lege, ac de quibuſdam Infiniti myſteriis.

M Ira quædam ſe prodit in omni Geometricorum Locorum transformatione Geometriæ indoles, mira admodum, & noſtris mentibus prorſus impervia incurrunt in oculos ıiti Geometrici quædam velut myſteria, quæ lem in iis etiam, quæ de Conicis Sectionibus obis demonſtrata ſunt, contemplari licet; n ipſam ob cauſam ea hic evolvenda nobis ıimus, ut ad ſublimiores curvas, & infiniıorum methodos brevi evulgandas pronior oni via ſterneretur.

74. In primis quæcunque cujuſcunque geoici loci pars eandem naturam habet, quæ s definitione continetur; atque idcirco haetiam proprietates prorſus eaſdem ex illa natura fluentes. Quamobrem quidquid de una

675. Et quidem aliquando fit, ut ſolutio uni caſui in ſchemate oculis propoſito applicata, ſine ullo peculiari diſcrimine applicetur caſibus omnibus, ac ſchema ipſum remaneat ejuſdem formæ. Multo tamen ſæpius in ipſis caſibus poſitio diverſa ita ſchema perturbat, ut artificio quodam ſit opus, ad ſervandam analogiam, & retinendam ſolutionis, ac demonſtrationis vim, quæ quidem poſitio illud etiam præſtat, ut quandoque ſumma aliqua in differentiam abeat:

676. Exemplum proferemus e Geometria plana petitum. Sint in fig. 239 binæ rectæ parallelæ indefinitæ AB, DG, quas ſecet in C, & H, recta EF pariter indefinita. Sit autem ducenda per datum punctum P recta occurrens iiſdem tribus rectis AB, DG, EF in M, O, N ita, ut ſumma binarum MN, ON, quæ intercipiuntur inter primam, & tertiam, ac inter ſecundam, & tertiam æquetur rectæ datæ. Facto centro in quovis puncto K alterius e parallelis, ut AB intervallo ejuſdem rectæ datæ inveniatur, ſi ea ſit ſatis longa, in altera parallela DG punctum I, ducaturque KI, tum ex P recta ipſi KI parallela, quæ ſi rectæ EF occurret in N_1 inter C, & H, ſolvet problema; erit enim ipſarum M_1N_1, O_1N_1 ſumma æqualis M_1O_1, adeoque æqualis lateri KI, oppoſito in parallelogrammo M_1KIO_1. Ubicumque punctum P fuerit collocatum ita, ut N_1 cadat inter C, & H, ſolutio problematis rite procedet. At ſi P jaceat in P_2, vel P_3 ita, ut N cadat extra CH, vel in N_2 ad partes H, vel in N_3 ad partes C, eadem F.239

dem conſtructio prima fronte videbitur fallere. Nam in utroque caſu earundem rectarum MN, NO non erit ſumma, ſed differentia MO, quæ æquatur CI.

677. Verum ſi poſitionis vis conſideretur, manebit etiam ibi analogia, & patebit, idem prorſus præſtari in omnibus caſibus, ac illam, quæ videtur differentia binarum quantitatum, revera eſſe ſummam. Nam & in quantitate diſcreta, ut in numeris, ac algebraicis formulis, & in quantitate continua, ut in Geometricis lineis, ſunt quædam quantitates, quæ dicuntur negativæ, & quæ ſi poſitivis addantur, eas minuunt, vel minuuntur ab iis. Si quis decem nummos habeat, & lucretur alios tres, habebit tredecim: & ſi potius contrahat debitum trium, habebit 7; ſi debitum ſit 9, habebit 1: ſi debitum ſit 10, habebit nihil, ſed ſi debitum ſit 13, jam habebit debitum quidem, ſed 3, minus nimirum, quam 13. Debitum illud eſt quædam negativa quantitas, quæ conjuncta cum poſitiva illa re habita, illam minuit, vel ab illa minuitur. Eodem pacto ſi quis, ſecundo fluvio remis etiam urgentibus promoveatur, & intra fluvium progrediatur remorum ope ſingulis minutis per paſſus 10, motu autem fluvii procedat per paſſus 3; conjunctis motibus progredietur per 13. At ſi fluvius retro reflectat motum, & retrahat navim per paſſus 3, vel 9, vel 10, vel 13, progreſſu, & regreſſu conjunctis, habebitur progreſſus 7, vel 1, vel nihil, vel etiam regreſſus 3. Regreſſus ille eſt negativa quantitas, quæ pro-

ogreſſum poſitivam quantitatem minuit, vel eo minuitur.

678. Porro ut in hoc ſecundo caſu mutatio rectionis poſitivam quantitatem mutat in nevam, ſic generaliter in Geometria directio oppoſitio eandem mutationem inducit. Pro vis quantitate variabili plaga poſitivorum arbitrium aſſumi poteſt, qua ſemel aſſumpta, ctio contraria quantitates exhibebit negati, ac ſi in aliquo caſu habebatur ſumma quæ quantitatum quarundam, & earum aliqua caſu alio directionem mutet; adhuc habebitur ma omnium, ſi ea quantitas in ſummam nevo modo computetur, eam nimirum demen vel ſi communis conſideratio adhibeatur, nimirum poſitionem, & directionem non t, ſed ſolam magnitudinem contemplatur. rentia ſuccedet ſummæ.

79. Satis patet, in expoſito problemate in ſecundo P2 directionem M2N2 manere ean, quæ fuerat in M1N1, at directio N2O2 ppoſita directioni N1O1. In tertio vero P3 directio quidem N3O3, manet eadem, N1O1, ſed M3N3 eſt contraria illi, quæ in M1N1. Hinc nimirum ſumma, quæ imo caſu erat æqualis rectæ datæ, abiit in s in differentiam. Quod ſi e caſu P2, pronur ad P1, tum inde ad P3, differentia, abetur in primo ex hiſce tribus, abit in m in ſecundo ob directionem alterius tanutatam, tum ſumma ſecundi mutatur in tiam tertii, cum iterum mutetur directio

etiam

etiam alterius. Cumque comparando primum ex hiſce caſibus cum tertio, utriuſque quantitatis directio mutetur; in utroque habetur differentia; quia nimirum ſi M2N2, & N2O2, in caſu P2 conſiderentur ambæ, ut quantitates poſitivæ, fient in tertia negativæ ambæ, quæ idem reſtituunt negativo modo, ſive directione contraria: Demendo O2N2, ab M2N2 relinquitur M2O2, ac demendo N3O3 ab M3N3 remanet O3M3, negative ſumpta, ſive M3O3, ut prius.

680. In quavis caſuum diverſorum contemplatione, ut in quavis combinatione locorum geometricorum, inprimis conſiderari debet ejuſmodi poſitio, quæ in eorum transformatione ſemper eaſdem proprietates reſtituet, dummodo ubicumque quantitatis directio mutetur, illa habeatur pro negativa, adeoque jam dematur ſi addebatur, vel contra addatur, ſi demebatur. Quæ enim addenda fuerat, dum decreſcit perpetuo, ſemper minus addet; ſi evadat nulla, & evaneſcat, addet nihil; ſi in contrariam etiam mutetur, mutata directione, contrarium itidem effectum præſtare debebit, nimirum minuet id, quod antea augebat,

681. Et in lineis quidem, ubi mutetur directio, ac ejus ope poſitiva migrent in negati-
F.240 va, ſatis erit manifeſtum per ſeſe, vel rectæ lineæ ſint, vel curvæ. Sic in fig.240, ſi binæ circuli chordæ ſe mutuo ſecent intra circulum in C, menſura anguli ACB eſt ſemiſumma arcuum AB, DE a rectis ipſum continentibus interceptorum (Cor.4, Pr.9, Geom.). At ſi punctum

C2

C2 jaceat extra circulum; ea ipſa menſura anguli AC2B evadit differentia arcuum AB, DE2, quod nimirum directio arcus DE2 eſt contraria dir:ctioni DE, quæ ſi negativo modo ſumatur: adhuc pro menſura habebitur ſemiſumma. Immo proderit hic etiam omnes mutationum vices contemplari, eaſque deducere ex ſolo primo caſu rectarum AE, BD, & poſitione puncti E percurrentis totam circuli peripheriam; donec eo redeat, unde digreſſum eſt. Anguli nimirum ACB menſura eſt ſemiſumma arcuum AB, ED. Abeat punctum E in D, & arcus ED fiet nullus hinc menſura anguli ADB, in quem tum abibit ACB, erit dimidius arcus AB. Abeat E in E2, & mutata directione arcus DE2, contraria nimirum dierctioni DE; jam anguli AC2B menſura erit ſemidifferentia arcuum AB, E2D. Evaat E3D æqualis ipſi AB, jam ſemidifferentia erit ulla, quare recta AE cum BD, nullum angum continebit: & quidem eo caſu patet, ipſas arallelas eſſe. Creſcat adhuc DE4, & jam evaet major, quam AB. Illius igitur dimidio empto a dimidio AB, ſemidifferentia evadet gativa. Quare angulus habebitur AC4B, ſed l partes oppoſitas jacebit, ac ſpectabit plagas ppoſitas, ut figura exprimit, ejuſque menſura it adhuc illa ſemidifferentia. Abeat E5 in A, evadet A5C5 tangens, anguli vero AC5B enſura erit ſemidifferentia arcuum DE5, AB, e DA, AB, quod ita eſſe patet; nam eorum cuum differentia eſt AE3, ob E3D æqualem B, ac anguli quem tangens C5A, producta con-

continet cum chorda AE3 parallela rectæ BD; qui iccirco æquatur interno, & oppoſito AC5B, menſura eſt dimidius arcus AE3. Abeat E6 inter A, & B, & anguli AC6B menſura erit ſemidifferentia DAE6, BA, quæ ob AE6 communem, reducetur ad ſemidifferentiam DA, BE6. Abeat punctum E in B, & evaneſcente E6B, menſura anguli ABD fiet dimidium arcus ſolius DA. Abeat demum punctum E7 ultra B, & BE7 jam mutabit directionem, adeoque menſura anguli ABD, ſpectantis eaſdem plagas erit ſemiſumma arcuum DA, BE7, ut patet omnino eſſe.

682. Et hæc quidem de lineis. At in ſuperficiebus notandum erit illum. Si ſumatur rectangulum binarum rectarum, & una ex iis poſitionem mutet, mutabitur, & rectangulum, ac e poſitivo migrabit in negativum: ſi vero mutet utraque, adhuc erit conſiderandum ejuſdem generis, ac erat, cum neutra poſitionem mutaverat. Nam ſi in fig. 241 CD, CA conſiderentur, ut quan-
F.241 titates poſitivæ, & earum rectangulum DCAB, ut poſitivum, mutetur autem CA in CF; jacebit DCFE ad partes oppoſitas, adeoque id rectangulum reſpectu prioris conſiderandum erit, ut negativum. Quod ſi iterum mutetur CD in CH, jam rectangulum FCGH, mutabit directionem reſpectu FCDE, adeoque debebit præſtare effectum contrarium, nimirum minuere, quod id augebat, augere, quod id minuebat; ac proinde negativi negativum erit, & iterum in poſitivum migrabit.

683. Hinc

683. Hinc in Geometria idem accidet, quod in Arithmetica, & Algebra contingit, ut nimirum ubi ducendo unam quantitatem in aliam, oritur productum quoddam, ſi altera e binis quantitatibus mutetur in negativam, fiat negativum & productum; ſi utraque maneat, ſit poſitivum, quod ibi exprimitur dicendo, ex multiplicatione tum binorum poſitivorum, tum binorum negativorum oriri poſitivum, ex multiplicatione poſitivi per negativum, vel viceverſa, oriri negativum, ſive ſigna conformia in multiplicatione exhibere poſitivum, difformia negativum,

684. Porro hinc illud conſequitur, ut lineæ cujuſcumque quadratum poſitivum ſemper maneat, licet eadem linea e poſitiva mutetur in negativam, poſitione mutata. Quadratum enim lineæ eſt ipſa linea in ſe ipſam ducta, quæ e ſuperiore canone producit planum poſitivum. Inde vero deducitur, quadrati negativi latus impoſſibile eſſe, quod in Arithmetica, & Algebra appellatur quantitas imaginaria. Quadratum autem quodcumque bina ſemper habere poteſt latera alterum poſitivum, alterum negativum. Atque iccirco ubicumque ploblema aliquod ad ſui ſolutionem requiret, ut inveniatur dati quadrati latus, ſemper id ipſum latus adhiberi poterit cum directione utravis, tam poſitivum, quam negativum.

685. Id patebit ſequenti exemplo. Debeat inveniri inter binas rectas media proportionalis. Quæſitæ mediæ quadratum debet æquari dato rectangulo ſub datis rectis. Quare binas omnino

V ſolu-

ſolutiones habere debebit id problema, & bina ejus quadrati latera inveniri debebunt conſtructione eadem. Atque id quidem omnino continget. Nam ſi in fig.242 binæ rectæ datæ abſcin-
F.242 dantur in AB, BD in eadem recta ita, ut earum ſumma conſtituat AD, ac ipſa AD ſecta bifariam in C, radio CA ducatur circulus, is rectæ EBF perpendiculari ad AD occurret in binis punctis G, G, eritque ex natura circuli utriuslibet BG quadratum æquale eidem rectangulo ſub AB, & BD, & utraque ex iis media quæſita. Ubicumque punctum B fuerit inter A, & D, ſolutio rite procedet. At ſi id ſumatur extra, vel ad partes A in B2, vel ad partes D in B3, mutata in primo caſu directione AB2, in ſecundo DB3, jam rectangulum ABD mutabitur in negativum, adeoque negativum evadet etiam illud quadratum, & iccirco ejus latus impoſſibile; quam ob rem id ea conſtructione inveniri nequaquam poterit. Et quidem rectæ E2B2F2, E3B3F3 ipſi AD perpendiculares nunquam occurrent circulo. Poterit quidem alia conſtructione determinari media inter AB2, & B2D, vel AB3, & B3D independenter ab illa mutatione directionis, nimirum ducendo binas tangentes B2H, vel B3H2 ad circulum ipſum, quæ erunt mediæ quæſitæ. Verum ibi iterum AB2, & B2D conſiderantur, ut poſitivæ, & ſi deinde B2, migret in B, & poſitio mutetur, jam ea conſtructio nos deſeret; neque enim ex B tangentes ad circulum duci poterunt, quæ problema eadem conſtructione ſolvant; migran-

te

te vero B in B3, jam & AB3, & DB3 habent directiones contrarias directionibus AB2, & DB2, adeoque rectangulum earundem iterum evadit poſitivum, ac iterum conſtructio redit cum binis tangentibus. Atque iccirco ſi in rectis EF ſumantur binæ B2L, vel binæ B3L2, æquales binis tangentibus, puncta L, L2 erunt ad binos ejuſdem Hyperbolæ æquilateræ ramos, quæ eſt Locus Geometricus diverſus ab illo circulo, cum quo nequaquam continuatur in A, ubi arcuum quamvis contiguorum natura, & proprietates ſunt admodum diverſæ, licet arcus aſſumantur quam proximi. Et hanc ipſam ob cauſam circulus quidem ordinatas BG axi perpendiculares habet reſpondentes punctis B aſſumptis inter A, & D, nullas autem habere poteſt extra eos limites; contra vero Hyperbola extra eos limites habet ſemper, intra eos habere omnino non poteſt.

686. Idem autem etiam in admodum ſimplicibus Geometriæ theorematis notare licet. Eſt quarta Euclidis Propoſitio Libri 2, puncto B jacente inter A, & D, bina quadrata AB, BD cum binis rectangulis ſub AB, BD æquari quadrato AD, ſeptima vero, puncto B2 jacente extra A, & D, bina quadrata AB2, B2D æquari quadrato AD cum binis rectangulis ſub AB2, & B2D. Hæ binæ propoſitiones exhibent tantummodo binos caſus ejuſdem theorematis, & ſecunda ſponte fluit e prima, dummodo notetur, AB2 habere directionem contrariam ei, quam habet AB, directionem vero DB2 eſſe eandem,

ac DB. Eo enim pacto patebit, quadrata quidem manere ut prius, at illa bina rectangula mutare poſitionem, & fieri negativa. Quamobrem ubi ante ſumma ex binis quadratis AB, BD, & binis rectangulis ſub AB, & BD æquabatur quadrato AD, jam illi æquabitur non ſumma, ſed differentia, quæ habetur demendo ab illis binis quadratis illa bina rectangula, unde ſequitur illa bina quadrata æquari quadrato AD binis illis rectangulis aucto.

687. Eodem etiam pacto tam quinta, & ſexta, quam nona, & decima, immo etiam ſecunda, & tertia, duodecima, & decimatertia ejuſdem libri ad ſingula theoremata reduci poſſunt, habita ratione poſitivorum, ac negativorum in mutatione directionis, mutante valorem rectanguli, non vero quadrati. Ac in reliquis quidem mutatio illa valoris enunciationem ipſam theorematis mutat, cum in iis habeantur rectangula. At in nona, & decima, quæ continet ſola quadrata, nullo in iis mutato valore, enunciatio manet eadem. Secta AD bifariam in C, ſi punctum B ſit inter A, & D, bina quadrata AB, BD æquabuntur per nonam binis CA, & binis CB. Si antem B2 ſit extra eos limites, erunt pariter per decimam bina quadrata AB2, DB2 æqualia binis CA, & binis CB2. Mutata eſt directio lateris AB in AB2, ſed valor quadrati non eſt mutatus.

688. In ſolidis pariter, ſi una e tribus rectis ſolidum continentibus mutet directionem, mutatur ſolidum e poſitivo in negativum; ſi enim con-

concipiatur planum a reliquis binis contentum immobile, recta vero, quæ directionem mutat, ſit ſolidi altitudo, jacebit ſolidum ipſum ad partem oppoſitam poſt mutationem directionis in ea altitudine; ac proinde & ejus valor mutabitur. Quod ſi mutentur binæ, redibit iterum ad valorem poſitivum, cum iterum mutari debeat; ſi mutentur omnes tres, iterum valor ſolidi mutabitur, & generaliter ubicumque aliquod ſive recta ſit, ſive area, ſive ſolidum, definiatur ductu, vel proportionibus rectarum quotcunque, ſi earum numerus impar directionem mutet, ipſum productum mutabit valorem: ſi numerus earum, quæ mutantur, ſit par, valor manebit. Nam ſingularum mutatio debet valorem producti mutare, quod proinde e poſitivo in negativum, e negativo in poſitivum abibit per vices, adeoque poſt numerum parem eodem ſemper regredietur, ac alia mutatione deinde addita, in oppoſitum valorem migrabit.

689. Id manifeſtum erit, ubi datis tribus rectis quæratur quarta proportionalis poſt ipſas. Ducantur binæ rectæ AB, DE indefinitæ in fig. 243, quæ ſe mutuo ſecent in C: ſumantur CH, CF verſus A æquales prioribus binis, CI F.243
verſus E æqualis tertiæ: ducatur HI, tum ex 244
F recta ipſi parallela, quæ abſcindet ex DE re- 245
ctam CG, quæſitam poſt CH, CF, CI. Mute- 246
tur jam directio primæ CH in oppoſitam in fig. 244, manentibus directionibus CF, CI, recta FG parallela IH ſolvet itidem problema, ſed CG jacebit ad partes oppoſitas directione mu-

 tata.

tata. Mutetur in fig. 245, etiam CF, & jam recta FG parallela HI redibit ad poſitionem CG eandem, quam habuit in fig. 243. Mutetur demum in fig. 246 etiam CI, & jam CG quoque iterum mutabitur ad directionem oppoſitam, Quin immo ſi quæcunque ex illis tribus CH, CF, CI figuræ primæ mutetur in contrarium, patebit eos caſus delineanti mutari ſemper CG. Sed quodcumque binarium mutetur quavis ex iis relicta in poſitione priore, patebit ſemper, directionem CG manere; ac ſi quis rationes etiam compoſitas adhibeat quotcumque, poterit ſane mutationes quotlibuerit experiri, & ſemper inveniet, numerum mutationum imparem inducere mutationem, parem vero retinere valorem priſtinum.

690. Porro in ejuſmodi mutationibus anguli quoque rectarum mutabuntur ita, ut mutata directione unius lateris, mutetur angulus in eum, qui ejus complementum eſt ad duos rectos, mutata autem directione utriuſque lateris, mutabitur angulus in alium ſibi ad verticem oppoſitum, qui ipſi prorſus æqualis eſt, & ejus vices æque præſtabit in demonſtratione quacumque. Ac demonſtratio, vel ipſa etiam theorematis propoſiti veritas admodum facile ab uno caſu transferetur ad alium, ſi ubi alterius tantummodo lateris mutetur directio, ſubſtituatur angulo priori ejus complementum ad duos rectos, ubi utriuſque, ſubſtituatur angulus ad verticem oppoſitus. Fiet autem aliquando in ejuſmodi mutationibus, ut qui anguli in parallelis alterni erant,

erant, mutentur in externum, ac internum, & oppoſitum, internus in externum aliquando migret, & viceverſa, ac alia ejuſmodi conſequentur, quæ ſponte incurrent in oculos, ac ſingula perſequi, & exemplis illuſtrare infinitum eſſet. Satis erit in illis ipſis caſibus, quos expreſſimus in ejuſmodi figuris, notare vim demonſtrationis, & mutationem in angulis factam. Triangula HCI, FCG in fig.243 ſimilia ſunt, quia habent angulum HCI, FCG communem, nempe eundem ac ACE, anguli autem CHI, CIH externi æquales ſunt angulis CFG, CGF internis, & oppoſitis in parallelis HI, FG. Hinc eſt CH ad CF, ut CI ad CG. In figura 244 ſunt itidem ſimilia triangula HCI, FCG; ſed iccirco ſimilia ſunt, quia anguli HCI, FCG ſunt ad verticem oppoſiti æquales, & CHI, CIH æquales alternis CFG, CGF. Mutatio lateris CH mutavit angulum ACE in ECB, & mutatio lateris CG mutavit ipſum ACE in ACD. Anguli vero CHI, CIH, qui erant externi reſpectu CFG, CGF internorum, & oppoſitorum in fig.243, evaſerunt alterni in fig.244. At demonſtrationis vis adhuc relicta eſt.

691. Patet itidem mutatione ipſa directionis argumentationem, quæ fit componendo, mutari debere in eam, quæ fit dividendo, quotieſcunque in proportione aliqua bini tantummodo termini antecedentes, vel bini conſequentes mutent directionem, manere, ſi mutent priores bini, vel bini poſtremi, vel omnes ſimul: mutabunt autem ſemper vel nullus, vel bini, vel omnes, cum ſi e prioribus tribus mutet primus ſolus,

vel tres, debeat mutare quartus, ſi bini, quartus manere debeat; unde patet, fieri non poſſe, ut eorum, qui mutant, numerus ſit impar. In fig.243, cum ſit CF ad CH, ut CG ad CI, erit dividendo FH ad CH, ut GI ad CI. At in fig.244, ubi CG, & CH mutarunt directionem, fiet componendo FH ad CH, ut GI ad CI. In fig.245, ubi mutant priores bini, & fig.246, ubi mutant omnes, habetur iterum argumentum componendo. Ratio eſt manifeſta, quia ſumma primi, & ſecundi, vel tertii, & quarti mutatur in differentiam, vel differentia in ſummam, ubi alter ex iis poſitionem mutat, manet vero ſumma, vel differentia, ſi vel neuter mutet, vel uterque.

692. Ex iis, quæ demonſtravimus, licebit ſæpe Locorum Geometricorum ductum, & varios caſus, ac transformationes contemplari. Exemplum deſumemus a curvis quibuſdam, quæ ſummum in univerſa Geometria uſum habent, & quas diligentius perſequemur ibi, ubi infiniteſimorum elementis traditis, agemus de curvis generaliter, ac ea curvarum genera, quæ majoris ſunt uſus perſequemur. Interea earum ductus hìc definitus plurimum proderit ad quædam infiniti myſteria evolvenda, & cognoſcendam intimius continuitatis geometricæ legem, ac ipſa plurimorum caſuum contemplatio, & locorum generalis conſtructio ſibi ubique reſpondens, ad Geometriæ ipſius indolem, miram ſanè, percipiendam pariter plurimum proderit.

693. Curvæ quarum naturam, & geneſim hìc contemplabimur, erunt eæ, in quibus ordi-

natæ

natæ ratio ſimplex, vel utcumque multiplicata eſt eadem, ac ratio ſimplex, vel utcumque multiplicata, ſive reciproca, ſive directa abſciſſæ. Si algebraicis ſignis uti libeat, & conſiderare altiores linearum poteſtates, quæ exprimantur indefinite per litteras *m*, & *n*, ac abſciſſa dicatur P, ordinata vero Q; lineæ hujuſmodi ſunt eæ, in quibus P^m, ut Q^n, exprimentibus *m*, & *n* numeros quoſcumque rationales integros, ſive poſitivos, ſive negativos, vel, quod eodem redit, in quibus ſit P, ut Q^n, exprimente *n* numerum quemcumque rationalem integrum, vel fractum, poſitivum, vel negativum. Sed hic, ubi Geometriam contemplamur, geometricum etiam ſermonem uſurpabimus, adhibendo rationum æqualium compoſitionem, quæ etiam multiplicatio rationum appellatur, potius quam poteſtates linearum, quæ ultra ſecundam, & tertiam, nimirum ultra quadratum, & cubum, in Geometria non aſſurgunt, aſſurgunt autem in Arithmetica conſideratione ad gradum quemcumque, ſi quædam linea dicatur unitas, qua de re ibi aptius, ubi de Algebræ applicatione ad Geometriam dicendum erit. Porro inter ejuſmodi Loca Geometrica habetur etiam recta linea tam axi inclinata, quam parallela, & tam Parabola ad axem relata, quam Hyperbola ad aſymptotos pro axe aſſumptos, & præterea omnis quædam, quam vocant Parabolarum, ac Hyperbolarum familia.

694. Sit

694. Sit in fig.247 recta indefinita MN, in
F.247 qua ſumantur abſciſſæ a quodam puncto dato V poſitivæ verſus N, ut VR, adeoque negativæ verſus M, ut VR2, ac ducta per V indefinita OVQ perpendiculari ad MN, ordinatæ capiantur parallelæ ipſi, & habeantur pro poſitivis directione VO, ut RP, adeoque pro negativis directione contraria VQ, ut R2 P2.

995. Sint autem primo ordinatæ in ratione ſimplici abſciſſarum. Sumpta VA ad arbitrium ex parte poſitiva, & erecta AB parallela VO ex parte itidem poſitiva longitudinis cujuſcunque, & ducta per V, & B recta ST indefinita ita, ut S jaceat ad partes V, ac T ad partes B, patet, eam fore Locum Geometricum quæſitum; ducta enim quavis RP parallela VO, ſemper erit ordinata PR ad abſciſſam VR, ut BA ad AV in eadem ratione conſtanti, adeoque illa mutabitur, ut hæc, ſive erit ordinata in ratione ſimplici directa abſciſſæ. Porro in hoc caſu patet, abſciſſæ poſitivæ VR debere ſemper reſpondere ordinatam poſitivam RP, negativæ vero VR2 negativam R2P2. Nam debet eſſe AB ad PR, ut VA ad VR, in qua proportione VA, & AB conſtantes ſunt, adeoque mutata poſitione abſciſſæ VR, mutari etiam debet poſitio ordinatæ RP, juxta num.688. Semper autem reſpondebit cuivis abſciſſæ ſua ordinata atque ea unica, cum hic nulla occurrant quadratorum latera, quæ bina eſſe poſſint poſitionum oppoſitarum, vel quæ quadrato negativo facto evadant impoſſibilia. Creſcente autem in infinitum abſciſſa, debet creſce-

ſcere & ordinata, ac ea evaneſcente, evaneſcere. Et hæc quidem omnia omnino accidunt in ea ipſa recta, quæ & tranſit per V, & utrinque in infinitum recedit ab axe ad partes oppoſitas.

696. Debeat in fig.248 eſſe ordinata RP in ratione duplicata directa abſciſſæ VR. Abſciſſis omnibus poſitivis, patet, debere reſpondere ordinatam poſitivam, & unicam, quæ invenietur, capiendo RP ad AB in ratione duplicata VR ad VA, ſive ut eſt quadratum VR ad quadratum VA. Facta autem abſciſſa VR2 negativa, adhuc ordinata R2P2 debebit eſſe poſitiva. Nam in illa ratione duplicata VR2 bis ingreditur, & proinde poſitio bis mutatur, ac quadratum abſciſſæ VR2 quamvis negativæ, eſt poſitivum. Porro patet, creſcente in infinitum abſciſſa, debere creſcere in infinitum, & ordinatam, ac infinities magis; unde colligitur, bina Loci Geometrici crura in infinitum abire ex parte VO verſus T, & S, recedendo ſemper & ab axe MN, & ab VO in infinitum: at abſciſſa in infinitum decreſcente patet, etiam ordinatam infinities magis debere decreſcere; unde infertur evaſcente abſciſſa, debere evaneſcere & ordinatam, adeoque Locum Geometricum hunc tranſire pariter per V. Quoniam vero ordinata infinities magis creſcit, quam abſciſſa, ubi ambæ creſcunt ultra quoſcumque limites, infinities autem magis decreſcit, ubi ambæ decreſcunt, patet, ſi per V, & P ducatur recta VI indefinita, angulum VPR in primo caſu, & PVR in ſecundo decreſcere ultra quoſcumque limites; adeoque ſi arcus VP concipiatur F.248

tur continuatus in infinitum verſus T, angulus OVI alternus ipſius VPR decreſcet in infinitum, accedente recta VI ad VO, ultra quoſcumque limites, quod nobis infra uſui erit, ubi agemus de infinito. Si vero arcus VP evaneſcat abeunte P in V, evaneſcet angulus IVN, & recta VI, quæ eo caſu evadet tangens, recidet in ipſum axem MVN, qui proinde locum SVT in V continget. Patet autem ex ipſa proportione expoſita, SVT debere eſſe Parabolam e Coni Sectione ortam, cujus axis VO. Ducta enim PE perpendiculari ad eum axem, eſt in Parabola VE abſciſſa, ut quadratum EP, quæ in ea dicitur ſemiordinata, adeoque RP, quæ hìc dicitur ordinata, eſt in ratione duplicata VR, quæ hìc dicitur abſciſſa. Porro in Parabola Conica patet crura VS, VT eſſe illius ipſius formæ, quam hìc ex illa poſitivorum, & negativorum notione deduximus.

697. Quod ſi debeat eſſe ordinata in ratione triplicata abſciſſæ, habebuntur, ut in fig:249,
F.249 bini arcus VT, VS infiniti, quorum alter iacebit in angulo OVN, alter in MVQ. Nam facta VR2 negativa, habetur in illa ratione triplicata numerus negativorum impar, & proinde negativa eſt etiam ordinata. Eodem vero argumento crura in infinitum abeunt, ac arcus tranſit per V, ubi a recta MN contingitur, a qua cum etiam ſecetur, habetur ibidem mutatio directionis curvaturæ, quæ appellatur mutatio flexus. Contactus autem, & interſectio hìc uniuntur, ut ubi circulus oſculator Sectionem Conicam

(num.

(num.512) ſecat ſimul, & tangit in ipſo oſculo. Porro hic locus appellatur Parabola cubica, in qua ſi OVQ aſſumatur pro axe, cubi ordinatarum PR ſunt, ut abſciſſæ.

698. Generaliter autem ſi ordinata PR ſit in ratione abſciſſæ VR utcumque multiplicata per numerum integrum poſitivum parem, ut ſi ſit in quadruplicata, ſextuplicata, decuplicata, debebit haberi ordinata quoque R2P2 poſitiva, & forma crurum, eadem, quæ in fig. 248; ſi per imparem, mutabitur in negativam, & habebitur forma figuræ 249.

699. Si vero ratio duplicata ordinatæ ſit eadem, ac ratio directa utcumque multiplicata per numerum imparem (nam ſi ſit eadem, ac ratio multiplicata per numerum parem, erit ratio ſimplex ordinatæ eadem, ac ratio abſciſſæ multiplicata per dimidium ejus numeri paris, & caſus reducetur ad alterum e binis præcedentibus) habebuntur bina crura ejus formæ, quam exhibet fig. 250 jacentia in angulis OVN, QVN. F.250 Nam exiſtente VR poſitiva, invenietur poſitivus valor quadrati ordinatæ, adeoque bina ejus latera habebuntur (num.684) RP, R*p*. Exiſtente vero VR2 negativa, valor quadrati ordinatæ negativus fiet, & proinde ordinata ipſa impoſſibilis, quam ob cauſſam recta LR2L ordinatis parallela nuſquam occurret curvæ. Quoniam autem eodem argumento decreſcente RP infinities magis, quam RV, adhuc VN contingit curvam; curva ipſa in V cuſpidem habet admodum acutam, in qua retro regreditur.

700.Idem

700. Idem generaliter contingit, quotieſcunque ratio ordinatæ multiplicata per quemvis numerum parem eſt eadem, ac ratio abſciſſæ multiplicata per imparem majorem. Imparitas abſciſſæ, & paritas ordinatæ dabit regreſſum curvæ a recta OQ, & binas ordinatas cum directionibus oppoſitis: exceſſus numeri abſciſſæ ſupra numerum ordinatæ, exhibebit contactum rectæ VN, & cuſpidem in V. Quod ſi ratio ordinatæ multiplicata per numerum imparem quemvis, ſit eadem, ac ratio abſciſſæ per numerum majorem parem, vel imparem, redibit forma 248, & 249, qui ſunt omnes ejuſmodi caſus, nam ratio ordinatæ multiplicata per parem æqualis rationi abſciſſæ per parem reducitur continua biſſectione ad imparem in altera e binis, adeoque ad unum e præcedentibus caſibus. Et hæc quidem omnia facile generali demonſtratione erui poſſunt ope conſtructionum quarundam, quas paullo infra exhibebimus.

701. Si jam numerus, per quem multiplicatur ratio abſciſſæ, ſit minor eo, per quem multiplicatur ratio ordinatæ, habebuntur figuræ 251,
F.251 252, 253, quas exhibebunt 248, 249, 250 ſi
252 permutentur abſciſſæ earum, & ordinatæ ac il-
253 larum rectæ OQ ſuccedat harum axis MN ſi enim hic ſint VR, & RP, quæ ibi erant VE, & EP, ſive PR, & VR, habebitur hic eadem relatio ordinatarum ad abſciſſas, quæ ibi abſciſſarum ad ordinatas. In ijs omnibus caſibus erit OVQ tangens, & numerus major par in ordinata impar in abſciſſa præbebit in fig. 251,

binas

binas ordinatas oppoſitas ex parte abſciſſæ poſitiva, & ex parte negativa impoſſibiles; impar & in ordinata, & in abſciſſa in fig. 252 ordinatas ſingulas, & ejuſdem legis cum abſciſſis; impar in ordinata, par in abſciſſa, ordinatas ſemper ſingulas pro ſingulis abſciſſis, ſemper poſitivas, & cuſpidem.

702. Hi quidem ſunt omnes caſus rationis directæ. Si vero ratio fuerit reciproca, non directa; patet, ſi fuerit ſimplex, haberi in fig. 254 Hyperbolam *t*T, S*s* inter aſymptotos MN, OQ. F.254
Nam in ea (num. 227) eſt rectangulum ſub VR, & RP ſemper conſtans, adeoque RP in ratione reciproca ſimplici VR. Ea vero Hyperbola binos habet ramos in binis angulis ad verticem oppoſitis OVN, MVQ in infinitum excurrentes, ac accedentes ad ea angulorum crura ultra quoſcumque limites. Id autem etiam deducitur ex traditis negativorum regulis, & ex natura rationis reciprocæ ſimplicis. Nam mutata directione abſciſſæ mutari debet etiam directio ordinatæ, in cujus determinationem illa ſemel ingreditur. Generaliter autem ſi ratio ordinatæ utcumque multiplicata per numerum imparem æquetur rationi reciprocæ abſciſſæ multiplicatæ per imparem, forma erit eadem, ac in fig. 254. Ordinatæ poſitivis abſciſſis poſitivæ, negativis negativæ reſpondebunt ſingulis ſingulæ, ac creſcente in infinitum abſciſſa, decreſcet ordinata, ſed nunquam evaneſcet; decreſcente ordinata, abſciſſa creſcet in infinitum, & ſemper habebitur aliqua, adeoque quatuor

crura

crura erunt aſymptotica, habebunt pro aſymptotis omnia quatuor latera VM, VO, VN, VQ, & jacebunt in binis angulis ad verticem oppoſitis OVN, MVQ.

703. At ſi numerus ordinatæ fuerit impar,
F.255 ſed abſciſſæ par, orietur forma figuræ 255. Ordinatæ ſingulis abſciſſis reſpondebunt ſingulæ, ſed omnes poſitivæ erunt, adeoque bini rami aſymptotici jacebunt in binis angulis OVN, OVM.

704. Si demum numerus ordinatæ fuerit par, & abſciſſæ impar, negativis abſciſſis nullæ ordinatæ reſpondebunt, poſitivis reſpondebunt binæ oppoſitæ ſingulis, & forma erit, quæ exhibetur
F.256 in fig. 256, jacentibus binis ramis aſymptoticis in angulis NVO, NVQ.

705. Ut unico velut conſpectu contemplari liceat omnes ejuſmodi caſus, ſit P^m, ut Q^n, ſive P, ut $Q^{\frac{n}{m}}$ exprimente P abſciſſam, Q ordinatam, n, & m numeros quoſcumque integros poſitivos, vel negativos inter ſe primos ita, ut fractio $\frac{n}{m}$ non poſſit reduci ad minorem expreſſionem. Si fuerit $\frac{n}{m}$ numerus poſitivus, pertinebit caſus ad figuras a 247 ad 254, ſi negativus ad 3 reliquas; & in primo caſu loca omnia erunt ex familia Parabolarum, in ſecundo ex familia Hy-

Hyperbolarum. Si m fuerit numerus æqualis n, adeoque $\frac{n}{m}$ fuerit unitas; pertinebit caſus ad rectam expreſſam in fig. 247. Si m fuerit numerus minor, quam n: pertinebit caſus ad figuras 248, 249, 250, prout fuerit m impar, n par, vel m, & n impar, vel m par, n impar. Si m fuerit major, quam n, habebuntur figuræ 251, 252, 253 in iiſdem tribus ſubdiviſionibus ejus caſus. Si autem $\frac{n}{m}$ fuerit negativus habebitur figura 254, 255, 256 prout fuerit & m, & n impar, vel m par, n impar, vel m impar, n par. Quod ſi m eſſet nihil, adeoque ordinata in nulla ratione abſciſſæ; tum vero ordinata eſſet ſemper conſtans, adeoque pro curvis illis haberetur tantummodo recta ipſi axi parallela in quam eo caſu eædem curvæ abeunt.

706. Quæ ex natura poſitivorum, ac negativorum hìc deducta ſunt, poſſunt omnia accuratè demonſtrari, & immediatè deduci ope conſtructionis harum curvarum ipſarum, quæ conſtructio rite peracta exhibebit per ſeſe curvarum earundem omnium ductum, & quæ ſemper geometricè præſtari poterit per puncta ita, ut prius habeatur conſtructio earum, quæ exhibent ordinatæ rationem ſimplicem reſpondentem rationi abſciſſæ multiplicatæ per quemvis numerum gradatim ab unitate incipiendo, tum pergendo per unitatis additionem continuam. Deinde ve-

ro traduci poteſt conſtructio ad quamvis rationem multiplicatam etiam abſciſſæ.

707. Quoniam recta linea exprimit caſum, in quo ordinata eſt in ratione ſimplici directa abſciſſæ, quæratur in fig. 257. linea, in qua ſit
F.257 ordinata in ratione duplicata directa ejuſdem. Capiatur AB utcumque perpendicularis VA, producaturque indefinitè: agatur per V, & B recta indefinita; ducatur per quodvis punctum R axis MN recta parallela QO, quæ occurrat alicubi rectæ VB in P; ducatur PD axi parallela occurrens rectæ BA in D; ducatur per V, & D recta, quæ rectæ illi RP occurret alicubi in E, & ibidem determinabit ordinatam loci quæſiti. Erit enim ob rectæ lineæ naturam PR, ut VR. Erit autem BA ad DA, ut PR ad ER. Quare rectangulum ſub AB conſtanti, & ER æquale rectangulo ſub DA, & PR, adeoque ER in ratione compoſita ipſarum DA, & PR, nimirum, cum eæ æquentur, in ratione duplicata PR, ſive VR, ut oportebat. Patebit autem ipſam conſtructionem contemplanti, a puncto P oriri RE conformem RP, ac poſitivam, a puncto vero P2 oriri R2E2 ipſi contrariam, ſive a negativo iterum poſitivam, ut eſt R2P2 in fig. 248.

708. Invenienda jam ſit curva, in qua ordi-
F.258 nata ſit in ratione triplicata abſciſſæ. Sit in fig. 258, recta VB, ut prius, & curva SI2VIBT jam conſtructa ejuſmodi, ut RI ſit in ratione duplicata VR. Ducatur ex I recta ID parallela axi, occurrens AB in D, tum per V, & D recta, quæ rectæ RP occurret in E, ac determinabit punctum E quæſitum. Erit enim BA ad DA, ſive IR,

IR ; ut PR, ad RE. Quare, ut prius ER, in ratione compoſita RI, & RP, prior eſt duplicata VR, poſterior ſimplex. Quare ratio illa compoſita erit triplicata ipſius VR, ut oportebat. Patet autem etiam hìc, punctum I2 jacens ex parte poſitiva debere iterum reddere punctum E2 ex parte negativa. Patet etiam, ſi RI ſit in ratione triplicata VR, obventuram RE in ratione quadruplicata, ſed tunc debere I2 jacere ex parte negativa, & P2 tranſire ad partem poſitivam, atque ita porro quævis multiplicatio rationis abſciſſæ habebitur per gradus, iacente ſemper E2 ex parte poſitiva, ubi devenitur ad numerum parem, negativa, ubi ad imparem; atque ea ratione habentur omnes caſus hujuſmodi, in quibus ordinata ſit in quavis ratione abſciſſæ multiplicata per quemvis numerum integrum poſitivum; ac ſimul etiam omnes caſus, in quibus debeat eſſe ſubmultiplicata ea ratio, ſive in quibus ratio ordinatæ, utcunque multiplicata, ſit eadem, ac ratio abſciſſæ ſimplex. Satis enim eſt mutare axem, & abſciſſam mutare in ordinatam, ut ex figuris 248, 249 conſtructis deriventur 251, 252.

709. Si ratio ſit reciproca ſimplex in fig. 259, ducta VB, ut prius, ducatur BI parallela axi occurrens rectæ RP in I, tum per V, & I recta occurrens rectæ AB in H, ac demum recta HE parallela axi, occurrens RP in E, eritque E quæſitum punctum. Erit enim AB ad AH, ſive RE, ut RP ad RI. Quamobrem rectangulum ſub RP, & RE æquabitur conſtanti rectangulo ſub F.259

AB, & RI, eritque icci rco RE in ratione reciproca RP, ſive VR, ut oportebat. Conſtructio autem ipſa oſtendet E2 determinari a P2 ad partem negativam.

710. Si ratio ſit reciproca duplicata; manen-
F.260 te in fig. 260 VB, ſit tIBT curva jam deſcripta habens RI in ratione reciproca ſimplici VR, ductaque VIH, & HE, ut prius, habebitur quæſita RE. Erit enim AB ad AH, ſive RE, ut RP ad RI, adeoque ob AB conſtantem RI in ratione compoſita RE, & RP, ſive RE directe ut RI, et reciproce ut RP. Eſt autem ratio directa RI eadem, ac reciproca VR, & ratio reciproca RP eadem, ac reciproca VR. Quare erit RE in ratione reciproca duplicata VR, ut oportebat. Patet autem etiam hic, punctum I2 jacens ex parte negativa debere iterum reddere punctum E2 ex parte poſitiva. Patet etiam, ſi RI ſit in ratione reciproca duplicata VR; obventuram RE in ratione reciproca triplicata, ſed tunc debere I2 jacere ex parte poſitiva, & E2 tranſire ad partem negativam, atque ita porro quævis multiplicatio rationis reciprocæ habebitur per gradus, jacente ſemper E ex parte poſitiva in numero pari, negativa in impari.

711. Quodſi ratio ordinatæ multiplicata per aliquem numerum rationalem *n* debeat eſſe eadem, ac ratio abſciſſæ ſive directa, ſive reci-
F.261 proca multiplicata per alium quemvis *m*; id fa-
262 cile præſtari poterit ope curvarum jam conſtru-
263 ctarum. Fiat in fig. 261 axe MN curva SVT, cujus abſciſſæ VH ſint in ratione ordinatarum IH mul-

multiplicata per *n*, ac curva S'VT', cujus ordinatæ RP ſint in ratione abſciſſarum VR multiplicata per *m*. His ſemel præparatis per quodvis punctum R agatur recta perpendicularis MN, donec occurrat curvæ VT' in P, tum PD parallela NM uſque ad OQ, inde vero DH ad angulum VDH ſemirectum, quæ occurrat in H rectæ VN, deinde HI parallela QO, donec occurrat curvæ VT in I, ac demum per I recta parallela MN, quæ occurret RP in E, & determinabit quæſitum punctum E. Nam erit ob angulum VDH ſemirectum, & DVH rectum, VH æqualis VD, ſive RP. Erit autem VH in ratione IH, ſive in ratione RE multiplicata per *n*, & PR in ratione VR multiplicata per *m*. Ergo ratio RE multiplicata per *n* erit eadem, ac ratio VR multiplicata per *m*, ut oportebat.

712. Porro ſi *n* ſit numerus impar, & *m* par, habebitur caſus figuræ 261, compoſitæ ex fig. 252, & 248, ac E2 jacebit ex parte poſitiva, figura ipſa referente caſus reliquos fig. 248, vel 252: ſi fuerit & *n*, & *m* impar, habebitur caſus fig. 262 compoſitæ ex 249, & 252, ac habebitur E2 ex parte negativa, figura exprimente caſus reliquos ipſarum figurarum 249, & 252: ſi fuerit *n* par, & *m* impar; habebitur caſus figuræ 263 compoſitæ ex 251, & 249, figura ipſa referente caſus reliquos fig. 250, nullo exiſtente E2, quod reſpondeat R2, & reſpondentibus R binis E, & *e*. Quod ſi ratio ordinatæ multiplicata per *n*, deberet eſſe æqualis rationi reciprocæ abſciſſæ multiplicatæ per *m*, fa-

tis eſſet arcubus SVΓ parabolicis ſubſtituere crura hyperbolica figurarum 254, 255, 256 ita, ut in fig.260, 261, 262 RI eſſet in ratione reciproca abſciſſæ VR multiplicata per *m*, & patet, eadem prorſus conſtructione obtineri intentum.

713. Atque hoc demum pacto conſtrui poſſunt omnes prorſus, curvæ propoſitæ tam parabolici, quam hyperbolici generis, quæ quidem egregias, & utiliſſimas proprietates habent potiſſimum circa ſubtangentes, & arearum menſuram, quæ in omnibus accurate quadrabiles ſunt, præter unicam Hyperbolam Conicam rationis ſimplicis reciprocæ, ſed earum inveſtigatio nec ad rem præſentem facit, & multo eſt expeditior ope quantitatum infiniteſimarum; interea pergemus ad conſiderationem tranſitus, qui fit e poſitivo in negativum.

714. Mirum ſane, quam ſibi ubique conſtans ſit Geometria potiſſimum in lege continuationis ſervanda, cujus vi nihil uſpiam mutatur per ſaltum, aut totum ſimul exoritur, aut evaneſcit, ſed a quacumque magnitudine ad aliam quamcumque ſemper itur per intermedias omnes. Nullus Loci Geometrici arcus uſpiam abrumpitur, ſed vel in gyrum torquetur, vel in ſe ipſum reflectitur, ut in fig.250 in V, ac vel in ſe ipſum redit, ut in Ellipſi, vel in infinitum protenditur, ut crura hyperbolica, & parabolica, vel ſpiris infinitis circumagitur, aut recedendo a puncto quodam ex altera tantum parte in infinitum, & ex altera accedendo ſemper, quin ad ipſum pertingat unquam, & quin tamen

men uſpiam abrumpatur, quod & illi accidit, quam ſpiralem logarithmicam apellant, & cujus naturam alibi perſequemur, vel demum binis ſaltem ſpirarum ordinibus recedendo in infinitum, quod aliæ multæ ſpirales præſtant. Ac ordinatæ normales, ſubnormales, tangentes, anguli tangentium cum axe, vel cum recta data quavis, vel cum recta utcumque per eundem Locum Geometricum definita, curvatura ipſa, directio curvæ, ac quidvis aliud ſine ullo ſaltu mutatur ſemper tranſeundo per omnes intermedias quantitates ejuſdem generis,

715. Ea lex omnino ſervatur etiam, ubi e poſitivis quantitatibus tranſitur ad negativas, qui nimirum tranſitus non fit per ſaltum, ſed per gradus continuos. Fit autem is tranſitus duplici modo, nimirum vel tranſeundo per nihilum, vel per infinitum. Ac ubi per nihilum tranſitur, res ſane nullam admirationem parit, cum id, quod decreſcit, donec evaneſcat penitus, admodum rerum conſtitutioni, & naturæ ordini conſentaneum ſit, ut aliquando poſt interitum mutetur in oppoſitum, quemadmodum paullo ſuperius num. 677 vidimus contingere in debito, vel in regreſſu fluvii. At tranſitus e poſitivo in negativum myſteria quædam ſecum trahit, quæ hic evolvenda ſunt, & quæ ad Sectionum Conicarum naturam, & analogiam, ac ad univerſam Locorum Geometricorum indolem perſpiciendam mirum in modum conducunt. Primum autem proferemus exempla, in quibus, e poſitivo in negativum fit tranſitus per nihilum,

ac per infinitum petita etiam e vulgari Geometria, tum alia, quæ ad infinitum pertinent, addemus e Sectionibus Conicis demonſtratis, ac ex illis ipſis curvis, quas hic habuimus, & ad Hyperbolas, ac Parabolas ſublimiores referri diximus adjectis etiam regulis quibuſdam pro Locorum Geometricorum transformationibus.

716. Sit in fig.264 recta indefinita AB, ac
F.264 centro C extra ipſam aſſumpto, concipiatur circulus NKOQ quovis intervallo, per cujus centrum tranſeat recta DE parallela ipſi AB, occurrens circulo in N ad partes A, D, in O ad partes B, E. Sit autem CH perpendicularis ad AB occurrens ipſi in H, & circulo in K verſus H, ac in Q ad partes oppoſitas. Tranſeat demum per ipſum centrum C recta indefinita FG, quæ circulo occurrat in puncto L ad partes F, & M ad partes G, rectæ vero AB in P, atque ea recta concipiatur motu continuo delata in gyrum circa centrum illud C immotum ordine NKOQ. Minuetur primo HP, accedente L ad K, & evaneſcet: tum abeunte L in arcum KO in L', mutabit HP' directionem, adeoque poſt tranſitum per nihilum in H mutabitur e poſitiva in negativam, vel viceverſa. Pergat FG converti, & punctum P' perpetuo recedet ab H, aucta perpetuo HP' per omnes finitarum magnitudinum gradus in infinitum, donec L' abeat in O, quo caſu interſectio P' in illo infiniti quodam velut immenſo pelago quodammodo abſorpta nuſquam jam erit. Nam recta G'F' congruet cum DE parallela rectæ AB, adeoque cum ipſa

ipſa AB nuſquam concurret, licet in infinitum producatur. Verum utcumque parum inde removeatur ita, ut abeat L' in M, & M' in L; ſtatim P', quod poſt diſceſſum in infinitum delituerat eo unico momento temporis, quo L' erat in O, jam invenitur ex parte oppoſita in P, ac, ſi finitas tantummodo quantitates contemplemur, mutata eſt HP', in HP habentem directionem contrariam. Nimirum etiam in tranſitu puncti P per infinitum abit ipſa HP' e negativa in poſitivam, vel viceverſa.

717. Is tranſitus puncti P per infinitum ex una plaga in plagam oppoſitam videtur fieri motu prorſus continuo, tanquam ſi recta infinita HB, in infinita illa diſtantia connecteretur quodammodo cum recta infinita HA. Nullo enim tempore continuo deeſt locus aliquis puncti P, præter momentum illud, quo L' eſt in O, ac aſſignato quovis momento temporis, utcumque parum diſtante a momento illo quo L' eſt in O, aſſignari ſemper poteſt locus puncti P, qui iccirco eo ſolo momento temporis in infinito deliteſcit. In ipſo vero motu continuo recta CF verrit quodammodo totum ſpatium concluſum parallelis CE, HB ita, ut nullum ſit punctum utcumque proximum rectæ CE, utcumque remotum a recta CH, per quod aliquando non tranſeat, quod ipſum accidet rectæ CG reſpectu ſpatii DCHA, ubi punctum M' percurret arcum NK, motu ſcilicet ſemper continuo, & nuſquam interrupto.

718. Illud unicum eſt diſcrimen inter tranſitum rectæ HP' per nihilum, & per infinitum, quod nimirum in primo caſu in ipſo tranſitu ipſa qui-

quidem HP jam nulla ſit, punctum vero P' habeatur in H; in ſecundo punctum P' in illo immenſo infiniti pelago velut demerſum nuſquam jam ſit, ipſa autem HP' habeatur, & quidem infinita, niſi forte infinitum impoſſibile ſit, qua de re paullo inferius. Illud interea generaliter notari poteſt, nihilum, & infinitum abſolutum in extenſione ita inter ſe connecti, ut quotieſcumque in aliqua proportione geometrica bini termini finiti maneant, qui vel ſimul medii ſint, vel ſimul extremi, ſi reliquorum alter evaneſcat, debeat alter evadere abſolute infinitus, & viceverſa, quod etiam hic manifeſtum ſit, ſi ducatur L'Z perpendicularis ad KQ; erit enim CZ ad ZL', ut CH ad HP', ac abeunte L' in O evaneſcit CZ, & remanent finitæ CH, & ZL'; ſed hac de re occurret iterum ſermo:

719. Cæterum quod punctum P motu quodam continuo tranſeat per infinitum; & illud ipſum, quod ex altera parte demerſum fuerat in infinito, & obrutum, regrediatur ex parte oppoſita, videtur erui etiam ex ſolutione problematis, quo quæratur in figura 265, tertia CP continue proportionalis poſt binas CM, CO datas. Si enim centro C intervallo majoris CO F.265 deſcribatur circulus, cui occurrat in I rectæ MI perpendicularis ad CO, ducaturque per I tangens infinita GF, occurrens rectæ AB alicubi in P, erit ex circuli natura CP tertia proportionalis quæſita; ubi interea notetur & illud, licet ejuſmodi recta in binis punctis I circulo occurrat, unicam tamen CP reſpondere unico puncto M,

& ean-

& eandem ab utroque I exhiberi iccirco, quod cum etiam ob angulum rectum CIP ſit CM ad MI, ut MI ad MP; ubi pro MI poſitiva, ſumatur eadem negativa, manente directione primi termini CM, & ea mutata in binis terminis proportionis quatuor terminorum CM, MI, MI, MP, debet manere etiam directio quarti termini CP; adeoque ubi MI poſt tranſitum puncti I per O redeat ad magnitudinem eandem, licet oppoſitam directionem acquirat, debet redire eadem & magnitudo, & poſitio rectæ MP; & locus puncti P eſſe idem. Sed hoc ad tranſitum per infinitum non pertinet.

720. Pro ipſo tranſitu per infinitum conſiderando, recta CO utrinque in infinitum producatur in A, & B, ac circulo iterum occurrat in N, recta vero ipſi NO perpendicularis per C ducta occurrat circulo in QQ, & per utrunque Q ſit tangens DE indefinitè producta. Concipiatur jam punctum M motu continuo delatum ab O ad N ita, ut ſuperato centro C, abeat in M'. Punctum I transferetur per Q in I', tangens GF per DE in G'F', punctum vero P per infinitum recedens ex parte B regredietur ex ipſo infinito ex parte A. Ipſum quidem in ipſo appulſu puncti M ad C, infinito veluti obrutum, nuſquam erit; tangens enim DE parallela AB nuſquam ipſi AB occurret; at utcumque parum diſtet M a C, erit omnino alicubi ex parte altera B, vel A. Porro in eo motu puncta M, & I ſemper intueri licet, quæ dum per Q, & C tranſeunt, tranſeunt illa quidem motu continuo,

nec

nec omnino mutantur, ſed porro pergunt. Punctum igitur P, quod iis ſemper reſpondet, quod ſemper mentis acie ſaltem intueri poſſumus extra unicum infiniti caſum, videtur, in illo unico infiniti caſu in infinito ipſo quodammodo delituiſſe, non interiiſſe, nec mutatum eſſe, dum in illo caſu unico in infinito delituit quodammodo, ſed ex plaga contraria rediiſſe idem, adeoque in illis plagis contrariis videntur quodammodo connecti rectæ CB, CA nexu quodam noſtræ menti impervio, ſed qui, niſi infinitum repugnet, omnino haberi debeat. Porro novæ CM' reſpondet ipſa nova CP' ex parte oppoſita, quia ex quatuor proportionalibus CM, CO, CO, CP, mutata directione unius CM, ac manentibus CO, debuit mutari & poſtremæ CP directio, ac ſi pro CO ſumatur CN, & fiant CM', CN, CN, CP' proportionales, mutatis primis tribus, mutari debet, & quartus terminus cum (num.688) mutationum numerus impar, inducat mutationem in termino per præcedentes determinato par vero ipſum retineat.

721. Porro ipſa hæc mira continuatio, in translatione puncti per infinitum ad plagas prorſus contrarias, & menti noſtræ impervius infiniti nexus, plurimis aliis exemplis e Geometria petitis confirmatur, ubi nimirum, quæ cum puncto in infinitum recedente ita, ut nuſquam jam ſit, connectuntur, mutari cernimus motu continuo, & oculis ipſis ſubjecta, ac quodammodo velut devincta retinemus, ne in tranſitu per nihilum fugiant, & mutentur. Unum ex hujuſmodi

di exemplis hìc proferemus, in quo quidem omnino videbitur demonſtrari immediatus ille tranſitus, & infiniti nexus, ac patebit, rectam lineam haberi debere pro circulo, cujus radius ſit infinitus, & cujus centrum in infinita illa diſtantia, quodammodo velut obrutum deliteſcat, ac deinde ex parte oppoſita regrediatur. Ubi autem ex eo plures fructus perceperimus, progrediemur ad illuſtrandam ejus ope continuationis legem, & multa, quæ ad cuſpides, atque ad infinita curvarum crura pertinent, evolvemus. Multo autem plura in ipſis Sectionum Conicarum proprietatibus occurrent ex hoc miro, & noſtræ menti prorſus impervio infiniti nexu in plagis oppoſitis derivata, ubi etiam, dum earum natura, & analogia evolvitur, myſteria quædam ſe prodent, quæ mentem altius defixam, ac geometricis meditationibus initiatam incredibili ſane voluptate perfundent.

722. Concipiatur in ipſa fig. 264 radio PH circulus occurrens ipſi AB præterea in R. Moveatur jam, ut prius, punctum L per arcum NKOQ, F.264
& mentis acies defigatur in mutationes omnes, quæ interea accident ipſi circulo, tum quod ad magnitudinem, tum quod ad directionem pertinet curvaturæ. Curvatura quidem circuli & eſt minor, quo radius eſt major; eo enim magis ejuſdem longitudinis arcus ad rectam accedit lineam, quo e majore abſcinditur circulo, quam ob cauſam putei ſuperficies, quæ ex ingenti totius Telluris ſphæra deſumitur, ſenſibus apparet prorſus plana; atque idcirco circuli curvatura æſti-

æſtimari ſolet ita, ut ſit in ratione reciproca ſimplici radiorum.

723. Dum igitur punctum L accedit ad K ultra quoſcumque limites, minuitur radius HP pariter ultra limites quoſcumque, & ultra quoſcumque limites augetur curvatura. Apellente L ad K, appellit P ad H, evaneſcit radius HP, evaneſcit circulus, poſtquam per omnes finitarum magnitudinum gradus decreverunt; curvatura autem ipſius circuli per omnes pariter finitarum magnitudinum gradus aucta infinita eſſe deberet in eo caſu, ut in fig. 265 recta CP reciproca CM infinita evadere debuit, in ipſo velut interitu rectæ CM evaneſcentis. Tranſeunte L in L', jam iterum radius HP', ac circulus per omnes itidem finitarum magnitudinum gradus creſcunt, curvatura vero minuitur; at curvatura ipſa jam oppoſitam directionem acquiſivit, & quæ cavitas prius reſpiciebat plagam A in infinitum extenſam, jam plagam B reſpicit extenſam pariter in infinitum ad partes contrarias. Habemus igitur jam, curvaturam in tranſitu quodam per infinitum directionem mutaſſe motu continuo, & poſtquam cavitas quibuſdam velut hiantibus oculis plagam A aſpectaverat, utut motu continuo pergens, ipſos oculos jam ad plagam B converſos habet. Verum hìc quidem curvatura ipſa ad illam infiniti magnitudinem videtur acceſſiſſe ultra quoſcumque limites, at eam nequaquam attigiſſe, niſi in ipſo puncto, quod partibus, & flexu caret, quandam velut infinitam curvaturam animo confingamus.

724. Per-

724. Pergat jam moveri L' verſus O: perget augeri circuli radius, & ipſe circulus, ac per omnes magnitudinum finitarum gradus excreſcent in infinitum. Interea vero curvatura circuli decreſcet pariter ultra quoſcumque limites, & peripheria ad rectam CH utrinque in infinitum productam in S, & T accedet pariter ultra quoſcumque limites ita, ut nullum ſit punctum V ejuſdem rectæ in quacumque diſtantia ab H aſſumptum, ad quod ea peripheria aliquando non accedat ultra quoſcumque limites diſtantiæ cujuſcumque VI' utcumque parvæ. Ubicumque enim aſſumatur punctum I' extra rectam ST, ſemper inveniri poterit locus centri P' in recta AB ejuſmodi, ut peripheria per ipſum tranſeat. Satis erit rectam HI' ducere, tum ad I' conſtituere angulum HI'X æqualem angulo I'HB, & recta I'X debebit rectæ HB occurrere alicubi ob angulos I'HB, HI'X ſimul minores duobus rectis; ac ob eorum angulorum æqualitatem debebit ibidem triangulum conſtituere iſoſcelium: ac proinde ubi ad eum occurſum devenerit P', tranſibit peripheria per I', & eo tranſgreſſo, peripheria ipſa adhuc ad V accedet propius. Quod quidem cum verum omnino ſit de quovis puncto I utcumque proximo cuivis puncto V rectæ ST; peripheria ipſa motu continuo verret quodammodo, ac velut perradet omne ſpatium planum, quod a recta ST in infinitum protenditur ad partes B' ita, ut nullum ſit punctum ejus infiniti ſpatii, ad quod aliquando perhipheria non pertingat; dum L' percurrit arcum KO, nullum, ad quod iterum redeat,

deat, ſed aſſignato quovis puncto ejus ſpatii, ubicumque poſito, aſſignari ſemper poſſit locus centri P' ipſi reſpondens in recta HB, & puncti L' locus in arcu KO, ac utrolibet ex his aſſignato, aſſignari pariter poſſint omnia ſuperficiei puncta, per quæ tum tranſit ipſa peripheria.

725. Abeunte L' in O, punctum P' infinito obrutum, nuſquam erit, at abeunte L' in arcum OQ, & P ex parte oppoſita emergente ex infinito, jam circulum habebimus cum directione curvaturæ oppoſita, jacentem penitus ad plagam a priore prorſus averſam reſpectu rectæ ST, Radius, & circulus decreſcent per omnes finitarum magnitudinum gradus, curvatura creſcet, arcus autem eodem ordine verret, ac perradet omne ſpatium, quod ab ipſa recta ST porrigitur in infinitum ad partes A ita, ut per quodvis punctum I ejuſdem ſpatii tranſeat aliquando, donec, abeunte demum L' in Q, recidat iterum P in H, ac eadem phænomenorum ſeries exordiatur.

726. Iam vero quinam futurus eſt peripheriæ ſtatus in ipſo appulſu L' ad O, in quo punctum P' ita in infinitum receſſit, ut nuſquam jam eſſet? Debuit ſane congruere cum ipſa recta ST in infinitum producta. Concipiantur enim omnes infiniti ſtatus punctorum P', & L', ac omnes pariter infiniti ſtatus perhiperiæ circa punctum H. Cuivis ex illis reſpondere debet aliquis ex his. Nullus autem ipſius peripheriæ ſtatus habetur extra rectam ST, cui non reſpondeat altera ex parte rectæ ST ſuus ſtatus punctorum L', P', nec ullus eſt puncti L' ſtatus in arcu

arcu KOQ extra O, cui non reſpondeat aliquis ſtatus puncti P in recta infinita AB, & aliquis peripheriæ ſtatus hinc, vel inde a recta ST. Quare pro appulſu puncti L' ad O, cui reſpondet caſus ille puncti P' in immenſam illam infiniti abyſſum, atque voraginem velut demerſi, ille unicus ſtatus peripheriæ relinquitur, nimirum congruentia cum recta ST. Quoniam perhipheria cica H univerſam aream perradit ex parte B motu continuo, & in illo tranſitu L' per O abiit ad plagam oppoſitam; profecto debuit in ipſo appulſu L' ad O tranſire per rectam ipſam, nec a punctis I' ad puncta I tranſilire potuit, niſi tranſeundo per puncta V.

727. Inde autem duplici via nexus ille infiniti videtur erui; primo quidem, quia recta ipſa infinita ST debet conſiderari tanquam circulus quidam infinitus, cujus centrum ſit in infinita quadam diſtantia, ſive ex parte B, ſive ex parte A, quæ partes in ipſo infinito copulentur quodammodo, & conjungantur, ut ipſa circuli peripheria ab H verſus T digreſſa ad ipſum H ex parte S redeat quodammodo ductu continuo, nec uſquam abrupto. Secundo vero, quia ut peripheria illa eadem circa H, ex parte SBT tranſiit motu quodam continuo ad partem SAT, nec in ipſo tranſitu eſt mutata, ſed ſe explicavit quodammodo, & ſine ſaltu ullo in rectam abiit, ac deinde in contrariam partem ſe flexit, ita & illud ejus centrum P' videtur idem itidem manſiſſe, nec in illo tranſitu per infinitum commutatum eſſe.

 728. At-

728. Atque hinc quidem liceret jam ad Conicarum Sectionum analogiam quandam conſiderandam migrare, ſed quo plenius intelligatur res ipſa, addenda quædam, quæ pertinent ad regreſſum puncti cujuſpiam motu continuo delati a finitis quibuſdam limitibus, & ab ipſo infinito, quæ ad continuitatem Locorum Geometricorum intimius cognoſcendam conducunt, & cum his, de quibus agimus, nexus habent arctiſſimos.

729. In primis ubi quæpiam quantitas perpetuo decreſcit, ac demum evaneſcit coeuntibus binis illis limitibus, quibus terminabatur, ut, ubi de lineis agitur, binis punctis; aliquando quidem in contrariam mutatur, & in negativam abit, motum ſuum proſequente altero ejus limite, vel utroque, ſi uterque limes ſit mobilis, quod in exemplis contigit huc uſque allatis; aliquando vero retro regreditur, & cum eadem directione iterum creſcit ex parte poſitiva, limitibus illis ipſis, vel eorum altero, ſi alter immotus manet, retro curſum reflectentibus, unde advenerant. Eodem vero pacto etiam ubi quantitas excreſcit in infinitum, aliquando quidem ejus limes ex infinito regreditur ex parte oppoſita, ut pariter in exemplis huc uſque allatis contigit, aliquando vero ex eadem itidem parte infiniti redit retro, quo pacto quantitatis ipſius directio non mutatur. Rem itidem exemplis e ſimplici Geometria petitis illuſtrabimus.

730. In fig. 264 vidimus, HP mutare directionem tam ubi in appulſu L ad K, vel Q evaneſcit, quam ubi in appulſu ad O, vel N tran

ſit per infinitum. Id quidem ſemper accidet, ubicumque aſſumatur C intra circulum, ducta per ipſum punctum C recta DNOE, & excurrente puncto L motu continuo per circuli peripheriam. At ſi, ut in fig. 266, punctum C aſſumatur extra circulum ita, ut e binis tangentibus ex ipſo ductis ad circulum ipſum altera CQ F.266
ſit parallela AB, quæ producatur indefinite in DE, altera ſit CK, quæ ipſam AB ſecet in H, ac punctum L ipſius circuli peripheriam percurrat omnem motu continuo, & recta GF per ipſum, ac per C tranſeat ſemper, interſectio illa P oſcillabit quodammodo inter nihilum, & infinitum, retro ex utroque limite regrediens ſine directionis mutatione. Si enim in arcu circuli inter Q, K ad partes C ponatur I, ad partes vero contrarias R, & punctum L per arcum QRK excurrat verſus K motu continuo, minuetur HP: eo appellente ad K, ipſa HP evaneſcet; eo abeunte in L' in arcum KIQ, iterum P regredietur, & HP creſcet eadem directione, qua prius, ac per omnes magnitudinum finitarum gradus interjacentes inter nihilum, & infinitum, evadet demum abſolute infinita, ubi L' appellit ad Q, quo abeunte in L in arcum QRK, iterum P retro redibit ex infinito ex eadem plaga ſine tranſitu ad directionem oppoſitam, ac decreſcet per omnes magnitudinum earundem gradus ab infinito uſque ad nihilum, & ad ipſum nihilum appellet, ut prius, in ipſo appulſu L ad K.

731. Hæc autem ipſa videre eſt in illis Parabolarum, ac Hyperbolarum generibus, de qui-

bus a num. 694 egimus, ubi Parabolæ oſtendent
binos hoſce caſus in tranſitu per nihilum, Hy-
perbolæ vero in tranſitu per infinitum. Nam in
fig. 249, ubi punctum P per arcum TVS motu
F.248 continuo excurrat, minuitur tam abſciſſa VR,
249 quam ordinata RP ultra quoſcumque limites,
250 evaneſcunt in ipſo appulſu ad V, tum abeunte P
in P2 creſcit utraque ex parte oppoſita, dire-
ctione mutata in ipſo tranſitu per nihilum. In
fig. 248 in tranſitu per nihilum in V mutat qui-
dem directionem abſciſſa VR abiens in VR2, ſed
ordinata RP non mutat, quæ nimirum retro re-
greditur in R2P2. In fig. 250 e contrario, abeun-
te P per V in *p*, ordinata RP mutat directio-
nem in R*p*, abſciſſa VR retro regreditur. At in
fig. 254 ſi recta quædam parallela QO moveatur
motu continuo directione NM, excreſcit ordina-
F.254 ta RP in infinitum, per quod tranſit in ipſo ap-
255 pulſu R ad V, tum abeunte R in R2, mutat di-
256 rectionem, & abſciſſa VR delata in VR2 tranſgreſ-
ſa nihilum, & ordinata RP in R2P2 tranſgreſſa
infinitum, ubi punctum P a crure P*t* tranſit mo-
tu quodam continuo ad crus *s*P2, quaſi illa in-
finita crura in illa infinita diſtantia licet vergente
ad partes oppoſitas, inter ſe quodammodo connecte-
rentur, & continuarentur. At in fig. 255 abit qui-
dem abſciſſa VR in VR2 per nihilum directione mu-
tata, at ordinata RP directionem ſuam retinet in
R2P2, quo caſu crus P*t* cum crure *s*P2 conti-
nuatur quodammodo in illo infinito, ex quo ex
eadem plaga O regreditur. In fig. 256 arcus P*t*
cum arcu *sp* continuatur quodammodo in illa infi-
nita

nita diſtantia oppoſita, & abſciſſa quidem VR retro regreditur e nihilo, ordinata vero RP in motu puncti P per $Ptsp$ tranſgreſſo infinito mutatur, & oppoſitam directionem acquirit. Porro in hoc caſu continuari arcum Pt cum sp in illis plagis oppoſitis, colligitur ex eo, quod ſi per B agatur recta infinita IH occurrens cruri Pt in P, tum convertatur, ut angulo ABH evaneſcente congruat cum directione BA, & fiat parallela rectæ OQ, tum pergat ulterius in I'H', punctum P, peragrato toto arcu infinito Pt, ex parte oppoſita regredietur per sp in p.

732. In his quidem exemplis habuimus mutationem & abſciſſæ, & ordinatæ in fig. 249, & 254; mutationem abſciſſæ, & regreſſum ordinatæ a nihilo, vel ab infinito in fig. 248, & 255; regreſſum abſciſſæ, & mutationem ordinatæ in fig. 250, & 256. Nulla ex curvis ejus generis exhibet regreſſum utriuſque tam abſciſſæ, quam ordinatæ, ac cuſpides quidem, quæ ibi occurrunt, habent binos arcus poſitos hinc, & inde a communi tangente, & crura aſymptotica, ſi regrediuntur ex eadem parte infiniti, jacent pariter hinc, & inde ab aſymptoto. Sed facile eſt, curvas invenire harum ope, in quibus uterque arcus jaceat ad eandem tangentis partem, ac utrumque crus ad eandem partem aſymptoti, regrediatur autem abſciſſa e nihilo, ac ordinata ſive e nihilo, ſive ex infinito.

733. Sit in fig. 267 cuſpis D'OD ejuſdem generis, ac in 250, vel 253, in qua tangens OA F. 267
jaceat inter binos arcus OD, OD'. Aſſumpta

AV ad arbitrium ducatur recta MN in quovis angulo finito cum OA, quæ occurrat rectæ OA in A, captoque in eadem recta ſegmento AV ad arbitrium, ducatur VO indefinita, ac per quodvis ejus punctum E recta EL parallela MN, quæ occurrat curvæ D'OD in I', I, rectæ OA in F, ac in ipſa EL capiatur EP tertia poſt VE, EI, & EP' tertia poſt VE, EI' in eadem directione, in qua jacent EI, EI', niſi directio VE mutata, cogat mutare directionem ipſius EP, vel EP', & puncta P, P' erunt ad novam cuſpidem TOS, cujus tangens erit ipſa illa recta VO ita, ut uterque arcus OT, OS jaceat ad eandem partem tangentis ipſius. Nam accedente E ad O ultra quoſcumque limites, decreſcit etiam EF, adeoque tam EI, quam EI' ultra quoſcumque limites. Quamobrem EP, & EP' decreſcent ultra quoſcumque limites etiam reſpectu ipſarum EI, EI', adeoque reſpectu EF, & reſpectu EO habentis ad EF rationem finitam; unde fit, ut recta per O, & P, vel P' ducta accedat ad OV ultra quoſcumque limites, quæ iccirco punctis P, P' abeuntibus in O ſimul fiet tangens, & recidet in rectam VO; jacebit autem tam EP, quam EP' in directione eadem prope cuſpidem, cum EI, EI' in eadem directione jaceant.

734. At in fig. 268 ſint bina crura aſymptotica ID, I'D' hinc, & inde ab eadem aſymptoto AB, ut in fig. 255, & 256 ab iiſdem VO, VN. Secet ipſam AB quævis MN in A, & hanc in V ſecet OQ parallela ipſi aſymptoto AB. Ducta vero recta EL, ut prius, fiat pariter EP, vel EP' tertia poſt VE, EI, vel EI', & puncta P, P' erunt ad alia

F.268

bina

bina crura T*t*, S*s*, quæ habebunt pro communi aſymptoto rectam VO, ſed jacebunt ad eandem partem reſpectu ipſius. Creſcente enim VE in infinitum, accedunt EI, EI' in infinitum ad EF æqualem datæ VA. Quamobrem EP, EP' tertiæ poſt VE; & EF decreſcunt in infinitum; & crus utrumque accedit ad VO ultra quoſcumque limites, quam iccirco habet pro aſymptoto. Quoniam vero rectæ EI, EI' eandem directionem habent; habebunt eandem etiam EP, EP', & ramus uterque jacebit ad eandem partem aſymptoti.

735. Porro in utraque conſtructione facile admodum inveniuntur puncta H, H', in quibus nova curva priorem ſecat. Ea determinabuntur a recta ſecante bifariam angulum OVN. Si enim hæc recta occurrat rectæ EL in L: patet ob angulum ELV æqualem alterno LVN, adeoque etiam angulo EVL, fore EL æqualem EV, adeoque EP, vel EP' tertiam poſt EL, EI, vel EI' fore minorem, æqualem, vel majorem reſpectu EI, prout fuerit EI reſpectu EL. Quare ubi L congruet cum I, vel I' in H, vel H', ibi cum iiſdem congruet etiam P, vel P'. Sed hæc ad rem præſentem nullius ſunt uſus. Illud autem huc pertinet, quod in fig. 267 ſi habeatur pro abſciſſa OE, pro ordinata EP, EP' vel etiam EI, EI', excurrente P, vel I per arcum TPOP'S, vel DIOI'D', regreditur ſimul e nihilo tam abſciſſa OE, quam ordinata EP, vel EI, manente eadem directione etiam in EP', vel EI'. At in fig. 268, ſi ducantur ordinatæ PR, P'R' parallelæ rectæ OV,

 abeun-

abeunte P per crus T*t* in infinitum, ac redeunte per *s*P'S ex infinito, tam abſciſſa VR retro regredietur per VR' e nihilo, quam ordinata RP per R'P' ex infinito.

736. At hujuſmodi curvam, quæ bina crura aſymptotica habeat ad eandem aſymptoti partem, & quæ iccirco eundem illum regreſſum exhibere poſſit utriuſque, nimirum tam abſciſſæ, quam ordinatæ, admodum facile eſt conſtruere etiam in fig. 266. Satis eſt ibidem rectam CP
F.266 producere ita, ut PO, PO' ſint æquales ipſis CL, CL', & omnia puncta O, O' erunt ad curvam SO'MOT, quæ continget in M rectam CH productam ita, ut ſit HM æqualis tangenti CK, habebit vero bina crura O'S, OT in infinitum tendentia ab eadem parte rectæ HA, quæ erit aſymptotus utriuſque. Ductis enim CV, ON, O'N' perpendiculis in ipſam AH, erit CP ad PO, vel PO', nimirum ad CL, vel CL', ut CV ad ON, vel O'N'. Quare aucto in infinitum primo termino CP in acceſſu L, vel L' ad Q, & manentibus finitis CV, CL, vel CL', debebit ON, vel O'N' decreſcere ultra quoſcumque limites, & cum CL, CL' ambæ directionem habeant ſemper eandem; eandem pariter directionem habebunt ſemper & PO, PO', utroque puncto O jacente ad eandem partem rectæ AH. Abeuntibus autem L, & L' in K, patet O, & O' debere abire in M; unde illud conſequi patet, rectam nimirum FG evadere tangentem curvæ TMS.

737. His fuſius aliquanto expoſitis licebit jam inde eruere continuitatem quandam in ipſis Se-

Sectionibus Conicis, quæ in Hyperbola fit cum tranſitu per infinitum ad partes oppoſitas, in Parabola vero cum regreſſu. In fig. 269 ſint inter aſymptotos MCm, NCn bini rami ejuſdem F.269
Hyperbolæ SDT, sdt, ac recta quædam infinita AB tranſiens per ejus punctum D ipſi iterum occurrat in P, & circa ipſum D motu continuo convertatur, donec integram converſionem abſolvat: jaceat autem P_1 in crure DS, per quod ita excurret, ut A_1B_1 evadente in A_2B_2 parallela aſymptoto Mm, nuſquam jam ſit, ſed crure toto peragrato in infinito illo quodammodo deliteſcat: abeunte A_2B_2 in A_3B_3 jam punctum P emerget in P_3 ex diſtantia infinita oppoſita in crure s, ac motu continuato per A_4B_4 peragrabit P_4 totum crus t, donec facta A_5B_5 parallela aſymptoto Nn, iterum nuſquam ſit: pergente vero recta in A_6B_6 regredietur ex infinito ex parte oppoſita per crus T, quod percurret totum, donec recidat in D, facta A_7B_7 tangente. Atque hoc quidem pacto, ubi recta AB dimidiam converſionem abſolverit motu continuo, punctum itidem P motu continuo percurret utrumque Hyperbolæ ramum, & Hyperbola ipſa habenda erit pro curva quadam continua, quæ quodammodo in orbem redeat etiam ipſa, & in infinitis illis oppoſitis diſtantiis quodammodo veluti conjungatur, connectaturque, crure t conjuncto cum T, & s cum S. Ductus autem ejus continuus eſt DP_1S (*infinitum*) sP_3P_4t (*infinitum*) TP_6D.

738. Quod

738. Quod ſi punctum D aſſumatur intra Hyperbolæ ramum ubicumque : recta binas ſemper habebit interſectiones cum ejus perimetro juxta num.284 , dempto caſu , quo evadat aſymptotis parallela , quo caſu altera ex interſectionibus in infinitum abibit , & nuſquam jam erit ; ſemper autem ex infinito redibit ex parte oppoſita ; unde conſequitur etiam illud , mutari ſemper rectam DP e poſitiva in negativam in quovis tranſitu puncti P ex altero ramo in alterum. Sic DP1 jacet directione DA1 , ſed DP3 poſt tranſitum per infinitum contrariam directionem habet DB3 , quam habet etiam DP4 ; at iterum ſuperato infinito P6 jacet ad partes A6 . Quare ſi qua recta digreſſa a dato puncto , & terminata ad alterum ramum habeatur pro poſitiva ; ubi ad ramum alterum terminabitur , habenda erit pro negativa . Chorda quoque quævis , quæ ad eundem ramum terminabatur , ſi terminetur ad utrumque , e poſitiva tranſibit in negativam.

739. Hinc autem etiam , ſi concipiatur Hyperbolæ ordinata P*p* in fig.11 poſt receſſum pun-
F. 11 cti R in infinitum , regreſſumque per R′ ex parte oppoſita regrediens per P′*p*′ , permutabuntur puncta P , *p* in *p*′ , P′ ita , ut exiſtente P in latere dextro , ſit P′ in ſiniſtro , & viceverſa *p* e latere ſiniſtro tranſeat in *p*′ in latus dexterum , mutata itidem ipſius chordæ P*p* directione in contrariam in P′*p*′ , eaque ipſa e poſitiva migrante in negativam , vel viceverſa .

740. At in Parabola longe alio modo ſe res habet . Habetur nimirum regreſſus ex infinito

in

in recta DP in fig. 270. Si enim per punctum F.270
quodvis perimetri D tranſeat recta A1B1, & occurrat ipſi perimetro iterum in P1, tum moveatur ita, ut accedat ad poſitionem parallelam axi; recedet P1 ultra quoſcumque limites per crus DS, & ſemper alicubi exiſtet, donec AB fiat in A2B2 parallela axi, quo caſu juxta num. 149 ipſum P nuſquam jam erit: at progrediente recta ipſa in A3B3, ſtatim habebitur P3 in crure TD, quod punctum percurret totum id crus, donec in idem punctum D, ex quo fuerat digreſſum, recidat ubi AB evaſerit tangens in A4B4. Hic igitur DP, ubi in DP1 in infinitum excreverit, retro redibit in DP3 cum directione eadem. Erit autem Parabola etiam ipſa curva quædam continua in ſe quodammodo rediens hoc ordine DP1S (*infinitum*) TP3D.

741. Hic autem mirus itidem videtur nexus crurum S, & T in infinita licet diſtantia a ſe invicem ſe conjungentium quodammodo. Recedunt illa juxta num. 77 & ab axe, & a ſe invicem ultra quoſcumque limites: at ut in Hyperbola binorum ramorum crura continuabantur in illa infinita oppoſita diſtantia, ita hic continuantur quodammodo crura S, T in diſtantiis oppoſitis. Si nimirum D ſit vertex axis DA2, & concipiatur ordinata P1P3, quæ abeunte R in infinitum, & regreſſo inde regrediatur cum ipſo; puncta ipſa P1, P3 non regredientur, ſed P1 tranſibit in P3, & P3 in P1 tranſgreſſo infinito, in quo & ordinata ipſa in infinitum excreſcens continuatur quodammodo, & crura S, T con-

T continuantur. Hiatus vero ille inter bina crura S, T licet excreſcens in infinitum conſiderandus erit tanquam punctum quoddam infinitæ peripheriæ infiniti circuli deſcripti facto centro in vertice D. Utcumque enim exiguus angulus fiat A1DA2, ſemper (num. 286) recta A1B1 occurret iterum alicubi in P1 cruri parabolico, & ultra ipſum excurret. Si nimirum facto centro in D, aſſumpto radio quovis, deſcribatur circulus occurrens rectis A1D, A2D, A3D in H1, H2, H3, utcumque exiguus ſit arcus H1H2, ſemper punctum A1 excurret ultra Parabolæ ramum, ut pariter utcumque exiguus ſit arcus H2H3, excurret A3 ultra ipſum ramum. Quare ſi ſumatnr arcus H1H2 in quavis utcumque exigua ratione ad totam ſui circuli peripheriam, in circulo, qui concipiatur deſcriptus radio DA ſuperante chordam DP, adhuc minorem rationem habebit arcus interceptus cruribus ST, cum eam habere debeat arcus interceptus rectis P1A1, P3A3. Quare in circulo infinito ea ratio debebit eſſe prorſus nulla, ita, ut arcus interceptus ipſis cruribus nec habeat unum gradum illius circuli, nec unum minutum, nec unum ſecundum, & ita porro, ſed haberi debeat reſpectu ipſius prorſus ut punctum quoddam, quod illi ideæ continuitatis crurum ST magis etiam favet, & videtur excludere ſaltum quemdam infinitum e crure S ad T in illo continuato motu puncti P peragrantis ramum omnem Parabolæ, qui quodammodo redeat in ſe ipſum.

742. Porro eadem continuatio, & nexus crurum,

rum, ac regreſſus curvæ in ſe ipſam ope infiniti habetur etiam in curvis reliquis, de quibus hic egimus, ſive parabolici generis ſint, ſive hyperbolici. In primis in fig. 248, & 249, quodvis Parabolarum genus in orbem redit hoc ordine, VPT (*infinitum*) SP2V, & in fig. 250 VPT (*infinitum*) SpV. Id patebit, ſi concipiatur recta indefinita tranſiens per P, & V. Si enim ea moveatur circa V, & diſcedens a poſitione MN convertatur, donec deveniat prius ad poſitionem QO, tum ad NM, punctum P percurret prius totum crus VT, ex quo motu continuo tranſibit ad crus SV, quod percurret, crure T connexo quodammodo cum crure S in illa infinita diſtantia. In ramis pariter Hyperbolicis in fig. 254, 255, 256, ſemper habebitur continuatio crurum *t*, *s*, ac T, S in infinita diſtantia, & ductus curvæ continuus habebitur per BT (*infinitum*) SP2*s* (*infinitum*) *t*PB, ac in fig. 254 tam T, & S, quam *t*, & *s* conjunguntur in diſtantia infinita oppoſita, in fig. 255 T, & S conjunguntur in oppoſita *t*, & *s* in eadem, in fig. 256 contra T, & S in eadem *t*, & *s* in oppoſita.

F. 248 249 250

F. 254 255 256

743. Generaliter autem in figuris omnibus geometricis, ſive quarum omnia puncta inveniri poſſunt quocumque modo ope ſimplicis Geometriæ, vel ope curvarum per ſimplicem Geometriam conſtructarum per puncta, ſi quod crus in infinitum abeat, ſemper habebitur crus alterum ex infinito regrediens vel ex eadem parte, vel ex contraria cum ipſo in illa infinita diſtantia connexum quodammodo, quod omnino ad con-

continuitatis legem ubique in Geometria ſervatam religioſiſſime eſt neceſſarium, ac ope calculi algebraici generaliter demonſtrari poteſt, & ubi de applicatione Algebræ ad Geometriam agendum erit, omnino demonſtrabitur. Quamobrem ejuſmodi crura ſemper erunt numero paria. Idem autem, & in ſublimioribus curvis quibuſdam contingit, quas tranſcendentes vocant, præter ſpirales quaſdam, quæ ex altera parte in infinitum recedunt, ex altera circa punctum quoddam, vel orbem quendam infinitis ſpiris circumvolvuntur accedentes ſemper, quin unquam in ipſum recidant, de quibus agemus alibi. Crura autem hujuſmodi, vel parabolici erunt generis, vel hyperbolici. Primi generis crura nullam habent rectilineam aſymptotum, ad quam accedant ultra quoſcumque limites, ſed ultra quoſcumque limites a quavis recta data recedunt: Secundi generis crura habent rectilineam aſymptotum omnia, ad quam ultra quoſcumque limites accedunt. Illa ſemper recedunt a ſe invicem in infinitum, & in diſtantia infinita copulantur: hæc quandoque a ſe invicem recedunt, in infinitum quandoque vero accedunt; at in primo caſu ſemper recedunt ad plagas prorſus oppoſitas ita, ut adhuc aſymptotum eandem habeat ſemper utrumque crus, quod ubi in infinitum diſceſſerit ex parte altera ejus aſymptoti, poterit regredi vel ex eadem parte, vel ex oppoſita, ac vel ita, ut bina crura jaceant reſpectu ejuſdem aſymptoti ad eaſdem plagas, vel ita, ut jaceant ad oppoſitas. Crus *Pr* recedit in infinitum

ad

ad partes O aſymptoti OQ in figuris 254, 255, F.254
256, 268, regreditur autem in prima ex parte 255
oppoſita Q, & ad plagam oppoſitam VM, re- 256
ſpectu aſymptoti ipſius, in ſecunda ex eadem 268
parte O, ſed pariter ad plagam oppoſitam VM, in tertia ex parte oppoſita Q, ſed ad eandem plagam VN, in quarta ex eadem parte O, & ad plagam eandem VN.

744. Sic autem etiam in arcubus, qui ad punctum quoddam terminantur, idem accidit, ut ducta ibidem tangente, & recta ipſi tangenti inclinata utcumque, quæ nimirum recta producta cum ea ipſa tangente pariter producta continet 4 angulos, arcus curvæ ipſius continuari debeat, ſed jacere poſſit in quovis ex illis quatuor angulis, ſive regrediens, ſive progrediens. Arcus VS, qui eſt continuatio arcus TV jacet
in fig. 248, & 253, in angulo OVM, jacente F.248
ad latus reſpectu anguli OVN, in quo jacet TV; 249
in fig. 249, & 252 in angulo MVQ ad verticem 250
oppoſito: in fig. 250, & 251 in angulo NVQ 251
jacente ad latus alterum: at in fig. 267, tam 252
arcus TO, quam OS jacent in eodem angulo 253
VOA: Quotieſcumque autem continuatio habe- 267
tur in angulo ad verticem oppoſito, ut in ſecundo ex hiſce quatuor caſibus, habetur mutatio flexus in ipſo nexu binorum arcuum, rectâ, quæ arcum utrumque tangit, ibidem ipſum ſecante, ut in fig, 249, & 252. Quotieſcumque habetur continuatio in eodem angulo, ut in fig. 267, habetur cuſpis ſecundi generis duorum arcuum, quorum alter convexitatem obvertit alte-

alterius cavitati. In reliquis binis caſibus habetur vel continuatio quædam curvaturæ in eandem plagam, ut in fig. 248, & 251, vel cuſpis primi generis duorum arcuum ſibi obvertentium convexitates, ut in fig. 250, & 253, prout arcus continuatus jacet ad eandem tangentis partem, vel ad oppoſitam, in quo poſtremo caſu cuſpidis primi generis tangens curvam pariter in ipſo contactu ſecat. Cuſpis autem primi generis figuræ 250, & 253 habens tangentem inſertam inter binos arcus reſpondet cruribus hyperbolicis figuræ 255 habentibus aſymptotum mediam VO, in quam tangens deſinit, ubi punctum contactus ita in infinitum recedit, ut nuſquam jam ſit, & cuſpis fig. 267, TOS ſecundi generis jacens utroque arcu ad eandem tangentis partem cruribus T*t*, S*s* fig. 268 jacentibus pariter ad eandem partem aſymptoti, quæ cuſpis in hæc ipſa crura deſinit, ut patet ex ipſa conſtructione, ſi manentibus punctis V, A punctum O ita in infinitum diſcedat, ut nuſquam jam ſit, quo caſu a cuſpide primi generis DOD′ figuræ 267 generantur crura aſymptotica DBD′ figuræ 268, & a cuſpide TOS illius crura T*t*, S*s* hujus.

745. Porro in his ipſis cuſpidibus, & in illo flexu contrario continuitatis legem obſervare liceret pariter, ſed connexam ſæpe cum illo tranſitu per infinitum, vel cum conſideratione rectæ, tanquam in infinitis oppoſitis diſtantiis continuatæ, & redeuntis in ſe ipſam, ac tranſitum e poſitivo in negativum, tam per nihilum, quam per

per infinitum. Curvaturam enim, ut diximus num.722 metitur radius circuli curvam oſculantis in quovis puncto, cui ea cenſetur reciproce proportionalis. Porro centrum circuli oſculatoris ſemper jacet ex parte cava in recta perpendiculari tangenti, quod iccirco in flexu contrario figuræ 252, vel in cuſpide primi generis habente tangentem arcubus intermediam in fig. 253 debet in V tranſire e plaga VN, ad plagam oppoſitam VM, quod fieri omnino non poteſt, niſi tranſeat, vel per ipſum punctum V, vel per infinitum, tranſeunte radio oſculi, vel per nihilum, vel per infinitum, ac proinde curvatura, vel per infinitum, vel per nihilum. Et quidem ubi de circulorum oſculatorum generali determinatione agemus, videbimus in curvis quibuſcumque eam legem ſanctè ſervari ſemper, ut nulla cuſpis primi generis, nullus contrarius flexus habeatur, niſi in eo puncto, in quo radius oſculatoris circuli vel per nihilum tranſit, vel per infinitum; tum vero curvatura, & radii circulus migrant e poſitivis in negativa, licet aliquando etiam radius oſculi, & curvatura, vel ad nihilum deveniant, vel ad infinitum, ſed inde regrediantur, quo caſu oritur, vel arcus porro pergens, ac iter ſuum producens, ut TVS in fig. 248, vel cuſpis ſecundi generis, ut TOS in fig. 267, qui quidem arcus, & quæ cuſpis haberi itidem poſſunt radio oſculatoris circuli ad certam magnitudinem deveniente, nec ad nihilum, nec ad infinitum delato.

 746. Præ-

746. Præterea ſi conſideretur directio motus puncti P percurrentis arcum TVS, & concipiatur tangens eadem directione, facile apparebit, tam in fig. 248, 251 arcus pergentis, quam in 249, 252 arcus mutantis flexum, ſine directionis mutatione continuari motum per PVPa, vel PVp, at in cuſpide tam primi generis in fig. 250, 253, quam ſecundi in fig. 267 motum retro reflecti; ac proinde tangentis directio in illis manet, in his mutatur, & in eis ipſa tangens abit e poſitiva in negativam. Sed mutatio ubicumque fit, fieri ſemper debet in aliam directionem prorſus oppoſitam, tanquam ſi plagæ M, & N in fig. 250, vel Q, O in fig. 253 infinities a ſe invicem diſtantes in illa ipſa infinita diſtantia connecterentur inter ſe, & continuarentur, quorum analoga ſunt ea, quæ in hyperbolicis cruribus notari poſſunt, ut ubi de curvis agemus generaliter vel ope ſolius Geometriæ, vel ope calculi, fuſius exponemus, ac demonſtrabimus. Hic autem ea innuimus, ut innoteſcat hujus nexus, & continuationis uſus in univerſa Geometria latiſſime patens.

747. Porro crura hujuſmodi in infinitum protenſa in ſingulis Geometricis Locis jam bina ſunt tantummodo, jam quatuor, jam etiam plura, ita, ut quivis eorum numerus par haberi poſſit. Bina tantum parabolica habentur in Parabola conica, & in omnibus ſublimioribus Parabolis fig. 248, 249, 250, 251, 252, 253; quin immo bina quodammodo ſunt etiam in recta linea hinc, & inde in infinitum protenſa. Bina tantum

tum hyperbolica habentur in fig.266, cujus perimeter in ſe redit per MO'S (*infinitum*) TOM. F.254
Quatuor habentur hyperbolica in Hyperbola conica, & in Hyperbolis omnibus figurarum 255
254, 255, 256, & quatuor haberentur etiam 256
in fig.266, ſi punctum C eſſet propius rectæ AB 266
ita, ut tangens QCE alicubi occurreret rectæ AB ad partes B, quæ quidem curva in orbem rediret ſine crure infinito, ſi punctum C jaceret remotius, & tangens quoque CQ occurreret rectæ BA ad partes A, ut facile patebit curvas pro ejuſmodi caſibus conſtruenti, & contemplanti earum originem, ac naturam. Plura autem, & quocumque numero habentur crura in aliis curvis quamplurimis, quarum conſtructiones occurrent, ubi generaliter agemus de curvis lineis.

748. Interea antequam eas, quas hic determinavimus, curvas relinquamus; notabimus rationem quandam determinandi tangentes, quas turbant nonnihil cuſpides utriuſque generis, quæ poſſent aliquando non ſatis cautis inponere. Solent enim quandoque determinari tangentes curvarum hoc pacto. In fig. 266 recta CG ſecans arcum quendam IKR in L, & L' ita moveatur, ut demum interſectiones L, L' coeant in K: evaneſcente chorda LL', abibit ipſa ſecans in tangentem, & binæ interſectiones in contactum. Hæc methodus fallere poteſt aliquando; cum fieri poſſit, ut binæ interſectiones coeant, quin habeatur contactus, & habeatur contactus, quin binæ interſectiones coeant. Primum accidet, quoties-

tieſcumque habebitur cuſpis utriuslibet generis, ſecundum quotieſcumque curva a tangente ſimul ſecatur, ut in mutatione flexus, & in cuſpide primi generis. Rectæ curvam tangentis vera notio eſt ea, ut ſit recta, quæ ad ipſum arcum omnium maximè accedit ita, ut cum eo contineat angulum quovis rectilineo minorem, ſive ita, ut nulla alia recta duci poſſit e puncto contactus in eo angulo, quem arcus ipſe continet cum tangente. Porro ſi in fig.267 recta EL moveatur motu parallelo, donec abeat in eOl,
F.267 vel circa punctum L, donec abeat in LOR, interſectiones I, I', vel P, P' coibunt in O, nec tamen utralibet ex iis rectis evadet tangens utriuslibet cuſpidis. Contra vero in fig. 252,
F.252 253, recta parallela rectæ BA quamvis occurrens
253 curvæ in unico puncto P motu continuo dela-
251 ta abibit in tangentem OVQ, quin habeatur concurſus binarum tangentium. At extra ejuſmodi caſus, quotieſcumque nimirum, ut in fig. 251, bini arcus TV, VS continuati jacent in binis angulis, quos tangens cum alia recta per contactum ducta continet ad eandem plagam, ſemper rite procedet methodus, quod demonſtrabimus, ubi de curvis lineis agemus in genere, ut & illud, hunc caſum generaliter occurrere in curvis quibuſcumque: nam curvæ ipſæ in punctis tantummodo determinatis poſſunt habere vel flexum contrarium, vel cuſpidem primi, aut ſecundi generis, ſive continuationem arcus in aliquo e reliquis tribus angulis tangentis cum normali, non vero in omnibus punctis cujuſpiam arcus con-

continui, utcumque parvi, quod ipſum ibidem demonſtrabitur de circulo oſculatore, qui itidem generaliter habebitur in quavis curva, nec niſi punctis quibuſdam determinatis tantummodo deeſſe poterit.

749. Hic interea monendum illud, quoniam ea determinatione tangentis pro Sectionibus Conicis uſi ſumus num. 151, conſiderando in fig. 46, & ſequentibus concurſum punctorum P, *p* in I, F. 46
idcirco deinde num. 293 oſtenſum eſſe, tangentem eo pacto determinatam accedere ita ad arcum curvæ, ut in eo angulo nulla alia duci poſſit. Nam conferenti conditionem, quæ habetur in utroque caſu, quod rectæ ductæ a concurſu tangentis cum directrice, & a contactu ad focum contineant ibi angulum rectum juxta num. 175, patebit utramque determinationem eodem recidere. Quin immo cum inde conſtet generaliter, eo pacto definiri poſſe in Sectionibus Conicis tangentem, patet ſimul in iis, nuſquam haberi cuſpidem, aut flexum contrarium.

750. Eodem autem vitio, ac in iiſdem caſibus laborare, patet etiam, methodum, qua tangens determinatur demonſtrando arcum utrimque a quodam puncto jacere ad eandem partem cujuſdam rectæ, ac deducendo inde, eam rectam eſſe tangentem, & illud punctum eſſe punctum contactus. Id accidit in fig. 267 in rectis omnibus per O ductis, licet unica OV ſit tangens F. 267
cuſpidis ſecundi generis, & unica OA cuſpidis 252
primi, quin immo in hac accidit omnibus rectis præter ipſam ſolam tangentem OA. In ipſa vero

 tan-

tangente id nec accidit hic in cuſpide primi generis, nec in fig. 252 in flexu contrario; cum utrobique bini arcus hinc, & inde jaceant ad partes tangentis oppoſitas. At eo vitio non laborat methodus, qua recta occurrens curvæ in binis punctis, convertatur circa alterum ex iis immotum donec chorda evaneſcente, eodem recidat & alterum. Sic ſi in fig. 252 per V, & P agatur recta convertaturque, donec recidat P in V; recta ipſa abibit in tangentem OQ neceſſario omnium rectarum proximam ita, ut in eodem angulo nulla alia recta duci poſſit; nam ſi nova recta utcumque parum declinet a prima, jam erit una ex iis, quæ habebat alteram interſectionem, & arcum binis interſectionibus interjacentem interceptum angulo tangentis cum chorda. Idem autem accideret etiam in fig. 267, in qua ſi per O, & I, vel P ageretur recta, ac circa punctum O converteretur, donec abirent ea puncta in O, deſineret eadem recta in tangentem OA, OV. Verum hæc ipſa in tractatu de curvis lineis in genere pluribus perſequemur, & accuratius omnia demoſtrabimus.

751. Interea videbimus hic aliam quandam relationem, quam habet recta linea infinita, cum infinito circulo, quæ nobis uſui futura eſt infra, & ad plures tum analogias, tum anomalias detegendas conducet. Sit in fig. 271 recta infinita MN, eique perpendicularis OQ, quæ ipſam ſe-
F. 271 cet in R. In hac ſit centrum circuli P occurrentis ipſi in binis punctis I, I′, jacente I′ ad partes centri, & rectæ MN in binis A, C. Patet & chor-

chordam AC perpendicularem diametro ſecari in R bifariam ab eadem, & binos arcus AIC, AI'C itidem bifariam in I, & I'. Recedente centro P in infinitum ita, ut ſemper circulus tranſeat per eadem illa puncta A, & C, patet juxta num. 727, arcum AIC debere abire in rectam lineam, adeoque debere congruere, cum ipſa recta AC, abeunte I in R. Reliquus arcus AI', CI' partim abibit in rectas AM, CN in infinitum productas, partim ita in infinitum recedet cum ipſo puncto I, ut nuſquam jam ſit. Quamobrem ſicut in ipſo circulo bini habentur arcus AC, nimirum AIC, AI'C terminati binis punctis AC, qui arcus ſecantur bifariam in I, & I', ita habebuntur binæ rectæ AC, nimirum ARC, AM (*infinitum*) NC, ſive aſſumpto pro carateriſtica infiniti ſigno ∞, quo ſemper utemur in poſterum, AM ∞ NC, quorum prima ſecabitur bifariam in R, ſecunda in ∞ ita, ut prioris dimidia ſint AR, RC, poſterioris A∞, ∞C. Quin immo; quoniam, ut in fig. 89 vidimus num. 278, arcus F*m* ſunt numero infiniti tam directione FB*m*, quam directione FA*m*, qui nimirum his arcubus integras quotcumque peripherias addant; etiam hic infiniti numero erunt arcus incipientes ab A, & deſinentes in C, nimirum AIC, AICI'AIC, AICI'AICI'AIC, & contra AI'C, AI'CIAI'C, AI'CIAI'CIAI'C, & ita porro, ac infinitæ numero rectæ ARC, ARCN∞MARC, ARCN∞MARCN∞MARC, & contra AM∞NC, AM∞NCRAM∞NC, AM∞NCRAM∞NCRAM∞NC, & ita porro. F. 89

 752. Jam

752. Jam vero omiſſis reliquis magis compoſitis, ipſa recta finita ARC, & illa per infinitum traducta AM ∞ NC eam inter ſe analogiam habent, quam in eo circulo arcus AIC, AI'C: ut ii nimirum arcus communes habent proprietates, ſi alteri poſitivè ſumpto ſubſtituatur alter ſumptus negativè, ita etiam in recta illa MN utrinque infinita ſegmentum ejus finitum AC negative reſpondeat ſegmento AM ∞ NC per infinitum traducto, & viceverſa hoc negative ſumptum illi ſumpto poſitive.

753. Hinc autem in fig. 265, ubi imminuta
F.265 CM, augetur CP, donec puncto M abeunte in C, abeat P in infinitum ita, ut nuſquam jam ſit, ac puncto ipſo M abeunte in M' ad partes oppoſitas, abit etiam P ad partes oppoſitas in P', conſiderari poſſunt binæ CP', altera directione CB, quæ directio ſi aſſumatur pro poſitiva, adeoque oppoſita CA pro negativa, eadem erit adhuc poſitiva, & altera directione CA jam negativa. Illa nimirum erit COB ∞ AP', hæc CNP'. Hoc modo ſi res conſideretur poſt eandem CM', & CO, vel CM habebuntur quodammodo binæ tertiæ continue proportionales, altera negativa CNP', altera adhuc poſitiva COB ∞ AP'. Nimirum cum juxta num. 719 ſit CP poſitiva tertia poſt CM poſitivam, & CO; ut imminuta ipſa CM ultra quoſcumque limites, augetur ultra quoſcumque limites CP, & illa evaneſcente, ſive abeunte in nihilum, hæc abit in infinitum, ita facta CM' jam negativa, quæ quodammodo concipitur decreviſſe infra nihilum, ipſi

ipſi videtur quodammodo debere reſpondere ex eadèm parte quantitas pluſquam infinita, & cum reſpondeat COPB ∞ AP', videtur hæc dicenda eſſe quodammodo & poſitiva, & pluſquam infinita. Sed id quidem ad myſterium quoddam infiniti pertinet, & ad analogias quoſdam conducit, at in Geometria communi ipſi CM' negativæ negativa itidem illa finita CNP reſpondet ſine ullo myſterio, & ita, ut in iis, quæ inde deducuntur, perſpicua ubique evidentia habeatur, ac maxime manifeſta.

754. Conſideratio tamen binarum AC in figura 271 nimirum ARC, & AM ∞ NC, uſum F.271
etiam in Sectionibus Conicis contemplandis paul- 9
lo inferius habebit præſtantiſſimum, ubi axi El- 11
lipſeos MC*m* finito in fig. 9 oſtendemus prorſus, 269
& directe analogum, non axem finitum Hyperbolæ M*m* in fig. 11, ſed axem MH ∞ *bm* traductum per infinitum. Pariter in fig. 269, ubi recta A_1B_1 per A_2B_2 abit in A_3B_3, concipitur DP_1 per infinitum abire in DP_3 negativam. Abit illa, ſi analogia ſpectetur directa, & ab infiniti myſteriis petita, in DA_3 ∞ BP_3 adhuc poſitivam, & per infinitum traductam, & proprietates prioris quæcumque a directione pendent, cum hujus directione conſpirant. Sed conſiderari ſolet pro ipsâ illa altera DP finita, ac negativa, quæ huic contranaloga eſt, ſi hac voce uti licet, & eſt ejus complementum ad quendam veluti infinitum circulum, qua idea nobis infra opus erit ad oſtendendum illud etiam, poſſe rationem reddi, cur in negativis quanti-

tati-

tatibus ſubtractio additioni ſubſtituenda ſit etiam, ubi obvenerint ex tranſitu puncti per infinitum, licet quantitati, quæ habebatur ante diſceſſum in infinitum, ſit prorſus, & directe analoga non hæc quantitas negativa, ſed poſitiva illa per infinitum traducta, quæ juxta illam ſuperiorem ideam pluſquam infinita diceretur.

755. Quoniam autem huc uſque tam multa vidimus, quæ pertinent ad tranſitum quantitatum e poſitivis in negativas, vel regreſſum inde, libet hic adnectere aliam quandam analogiam, quam habet cum hoc ipſo tranſitu quantitatum e poſitivis in negativas, vel regreſſu tranſitus, qui fit e ſtatu reali, ad ſtatum imaginarium, qui impoſſibilitatem ſecum fert juxta num.684. Tranſitus e poſitivo in negativum nunquam fieri poteſt per ſaltum quendam, ubi adhuc decrementum haberi poſſit, vel incrementum ex eadem plaga, ſed gradatim, ut nimirum tranſitus ipſe fiat vel per nihilum, vel per infinitum. In primo caſu limites magnitudinis, ut ubi de lineis agitur, extrema puncta ad ſe invicem accedunt, & coeunt, in ſecundo a ſe invicem recedunt in infinitum. Eodem pacto realis quantitas nunquam in imaginariam abibit per ſaltum, ſed ſemper gradatim, nec unquam is tranſitus fiet, niſi ubi ea devenerit vel ad nihilum, vel ad infinitum. Ad hoſce veluti ſcopulos alliſa aliquando retro reflectitur adhuc realis, & per eoſdem gradus decreſcit, aliquando contrariam directionem acquirit per ipſum nihilum, vel infinitum traducta, aliquando vero in imaginariam

quo-

quoque migrat, ſive impoſſibilem. Regreſſus, ac tranſitus exempla dedimus jam plurima; hujus migrationis in ſtatum imaginarium exempla plurima ſe ubique prodent. En aliqua rei illuſtrandæ apta.

756. Dum in fig.242 recta EF motu continuo delata verſus E2F2 appellit ad A, bina puncta G, G ita in ſe invicem incurrunt, & quodammodo veluti colliduntur, ut ſe deſtruant, & motu ejus rectæ pergente, jam nuſquam ſint, e reali ſtatu in imaginarium translata, quæ migratio a migratione in infinitum plurimum differt. Migratio enim in infinitum determinationem quandam problemati addit, ut ubi Ellipſeos vertex in infinitum recedens Ellipſim ipſam mutat in Parabolam, ac abducto ſecum in infinitum altero foco, & centro, mutat in parallelos juxta n.202 radios illos, qui ex altero foco egreſſi, convergebant in Ellipſi poſt reflexionem ad focum alterum, ac parallelas itidem reddit diametros omnes, quæ in Ellipſi convergebant ad centrum, vel ubi circuli centrum recedens in infinitum ejus peripheriam mutat in rectam lineam. At abitus in imaginarietatem ſecum trahit impoſſibilitatem abſolutam problematis, quod ejus ope ſolvebatur ita, ut idem ſit in quavis reſolutione devenire ad latus quadrati negativi, ac problematis in eo caſu impoſſibilitatem evincere, quod & Geometris, & Algebriſtis ſolemne eſt. Linea igitur GG in eo caſu evadit imaginaria poſteaquam per omnes finitarum magnitudinum gradus decrevit uſque ad nihilum, at in fig.256 ordinata

F.242
256
268

Pp, puncto R abeunte per V in R2, evadit quidem imaginaria, ſed poſteaquam per omnes contra magnitudinum finitarum gradus crevit in infinitum; atque idem accideret in fig. 268 ordinatæ RpP, ſi punctum R continuaret curſum ultra V verſus M. Abiret ordinata etiam in eo caſu in infinitum, & deinde imaginaria evaderet.

757. Illud autem diſcriminis intercedit inter caſum, quo linea poſt diſceſſum in infinitum abit in imaginariam, & caſum, quo realis remanet, ac tranſilit, vel regreditur, quod in hoc ſecundo caſu poteſt haberi progreſſus, vel regreſſus etiam, ubi unicum punctum abit in infinitum, ut ubi in fig. 254 ordinata RP abit in contra-
F.242 riam R2P2, vel in fig. 255 regreditur per R2P2,
254 in quibus abit quidem in infinitum P, ſed rema-
255 net R; at in primo illo caſu nunquam habebi-
256 tur imaginarietas ipſa, niſi utrumque rectæ ex-
267 tremum abeat in infinitum ſive ad partes oppo-
268 ſitas, ut in fig. 256, ſive ad eaſdem, ut in fig. 268, adeoque niſi in illo ipſo infinito colliſio quædam habeatur, ac veluti pugna inter bina puncta ſibi invicem occurrentia ibidem, & ſe mutuo quodammodo elidentia. Hìc autem ipſe velut interitus quantitatis (ſi hanc etiam cum vero aliarum rerum interitu analogiam quandam perſequi libeat) nec habebitur ſane, niſi illa ipſa puncta velocitatem, qua in ſe mutuo irruunt, infinities majorem habeant ibi, quam alibi, ut facile demonſtratur contingere punctis G, G fig. 242, P, p fig. 268, & vero etiam P, p fig. 256, ubi puncta P, p ex parte finita a ſe invicem recedentia ultra quo-

quoſcumque limites, ex parte infinita ad ſe invicem accedunt pariter ultra quoſcumque limites, & ſibi invicem occurrunt quodammodo, & colliduntur: vel infinities minorem, quam alibi, velocitatem habeant reſpectivam, quod accideret utrique in cuſpidibus omnibus, quæ tamen multo pauciores ſunt juxta num.748; nam rectæ PP′, & II′ in fig. 267 paullo antequam evaneſcant, differentias habent in infinitum minores, quam alibi, ut facile demonſtrari poſſet, & poſt imminutam in infinitum velocitatem reſpectivi motus extremorum punctorum, abeunte EL ultra *el*, imaginariæ fiunt: ut adeo videatur etiam in Geometria hic interitus haberi poſſe tantummodo vel e nimio quodam quaſi furore, ac efferveſcentia, ut teli cujuſdam ictu haberi ſolet, ac febri, vel e languore quodam, ut habetur in ſenibus quandoque decrepitis ætate ipſa, & virium imbecillitate, quanquam id ipſum pariter perquam raro contingat.

758. Porro migrationis e ſtatu reali in imaginarium per nihilum ſatis etiam elegans exemplum habetur in ipſis Coni Sectionibus, quas a num.553 perſecuti ſumus. Aſſumpto in latere VA figuræ 208 quovis puncto M ad arbitrium, F.208
ſi concipiatur recta MI congruens initio cum MV 209
verſus poſitionem MA circumvoluta per pun- 210
ctum M, e recta linea MV, in qua planum ipſi 211
OVS parallelum eo caſu contingit conum, enaſcitur juxta num.585 Ellipſis principio arctiſſima, quæ perpetuo pingueſcit in cono recto, donec facto plano ipſo parallelo baſi ſectio evadat

dat circulus, punćto T abeunte in infinitum ita, ut nuſquam jam ſit, ſed in infinito ipſo delitefcat. Pergente motu, oblongatur perpetuo Sectionis forma, & abit per omnes gradus finitarum rationum axis conjugati ad tranſverſum, quas acquirit in fig.209 iterum a circulari forma recedens, ac punctum T traductum per infinitum jam regreditur ex parte oppoſita, quo abeunte demum in B, abit Sectionis figura in Parabolam figuræ 210, in qua vertex ille *m* jam infinito obrutus latet, & nuſquam eſt. Procedente ulterius T verſus A, jam habetur in figura 211 duplex ramus Hyperbolæ cum vertice *m* regreſſo ex infinito ex parte oppoſita, ac Hyperbolæ ipſius forma mutatur itidem perpetuo, donec ipſo puncto T, & cum eo etiam I abeuntibus ſimul in A, abeant ipſi Hyperbolæ rami in binas rectas MA, V*a'* infinitas. Perit hìc Sectionis Conicæ area, & ad nihilum devenit, poſteaquam e nihilo enata fuerat ab illa recta MV fig. 208, quæ reſpondet huic ipſi MV fig. 211: & is interitus habetur quodam veluti incurſu perimetri irruentis in ſe, & in axem tranſverſum hinc, & inde ab axe ipſo. Si motus plani qui eo caſu contingit conum, pergat ulterius in eandem plagam; jam punctum T abibit ultra A extra conum, & puncto *m* ſubeunte rectam VB, id planum iterum ſecabit ipſum conum, ac iterum naſcetur nova Ellipſis, & nova Sectionum Conicarum ſeries priori prorſus ſimillima. Sed hæc non continuatur cum illa priore, nec Hyperbolæ illæ poſtremæ in primas haſce

El-

Ellipſes mutantur. Illæ enim deſinunt in rectam MA ∞ *am* traductam per infinitum, hæ naſcuntur a recta finita MV, quæ illi traductæ per infinitum quodammodo non analoga eſt, ſed quodammodo velut antianaloga, nimirum ejus negativa, & ad eam relata, ut illi bini ejuſdem circuli arcus binis datis punctis interjecti, & contraria directione conſiderati AIC, AI'C in fig.271 ſibi invicem analogi ſunt. Prima illa igitur ſeries exortum habet in recta finita, interitum in recta per infinitum traducta illius ejuſdem finitæ rectæ complemento ad infinitum circulum, ac illi alia ſuccedit itidem ortum, & interitum habens ita, ut in ſingulis converſionibus integris, binæ ejuſmodi ſeries oriantur, & occidant, quarum quælibet ante ortum, vel poſt occaſum in imaginario ſtatu ſit. F.271

759. Porro in hujuſmodi transformationibus Sectionum Conicarum aliarum in alias habentur punctorum multiplices & tranſitus per nihilum, ac per infinitum, & regreſſus inde: ipſi autem appulſus ad infinitum, vel nihilum ſæpe puncta retinent in ſtatu reali, vel alicubi conſpicua, vel infinito obruta, ibique velut deliteſcentia, quandoqne etiam ad imaginarietatem deturbant, adeoque linearum, qnæ ipſis terminantur, habetur iam perſeverantia in eadem directione, jam directionis mutatio, jam impoſſibilitas, & ſæpe annihilatio, ac evaneſcentia, ſæpe productio in infinitum, ſæpe etiam circuitus quidam per infinitum, & quædam veluti pluſquam infinita extenſio. Hinc hæc ipſa Conicarum Sectionum transfor-

formatio aptiſſima eſt, ad declarandos, confirmandoſque quoſdam canones, qui per univerſam late Geometriam obſervantur, & eorum exempla ex demoſtratis harum curvarum elementis depromenda. Ex ipſis autem canonibus, eorumque applicatione ad hæc ipſa Conicarum Sectionum Elementa patebit etiam, quæ hiſce curvis communia ſint, & communem demonſtrationem ſuſcipiant, quæ ab altera ad alteram transferri non poſſint, & ipſa ejus anomaliæ ratio ſe prodet, ac noſtrum in hiſce elementis adornandis conſilium palam fiet. Ejuſmodi vero canones ex iis, quæ huc uſque vidimus pendent omnes, & ſunt eorum quidam veluti fructus. Proponemus autem ſingulos, ac eorum rationem proferemus, exempla dabimus, & applicationem ad Conicas Sectiones. Occurrent autem identidem quædam etiam infiniti myſteria, quæ eo uſque excreſcent, ut infiniti extenſi impoſſibilitatem demum ſuadeant, ac ad indefinitorum, ſive indefinite parva ſint, ſive indefinite magna, theoriam, quam alio opere pertractabimus, nos deducent.

760. In primis *Analoga* dicemus puncta, quæ eodem modo determinantur in utroque ejuſdem geometricæ conſtructionis, ſtatu ante nimirum transformationem, & poſt, quæ nempe determinantur per concurſum eorundem Locorum Geometricorum, rectarum cum aliis rectis, cum circulo, cum Sectionis Conicæ perimetro, cum lineis per ejuſmodi concurſus definitis eadem lege. Sic analoga ſunt in fig.239 tam puncta M1,
F.239 M2, M3, quam O1, O2, O3, & N1, N2, N3,
eo-

eodem modo definita per concurſum rectarum F.239
inter ſe: analogi ſunt tam vertices M, quam *m* 9
in fig.9, 10, 11 axium tranſverſorum Ellipſeos, 10
Parabolæ, Hyperbolæ, qui ubique eadem lege 11
determinantur per rationem conſtantem ex foco F aſſumpto, & recta directrice AB. *Analogas* autem dicemus lineas binis analogis punctis terminatas, ſuperficies terminatas lineis analogis, ſolida terminata analogis ſuperficiebus. Sic in fig.239 analogæ ſunt rectæ M1O1, M2O2, M3O3, & in fig.9, 10, 11 foci radii FM inter ſe, chordæ per focum ductæ VF*u* inter ſe, ac alia ejuſmodi.

761. Deinde bina hujus analogiæ genera diſtinguimus: alterum *Primarium*, & ſummum, cum poſt transformationem manet directio quantitatis definitæ, vel mutatur numero mutationum pari, alterum *Secundarium*, cum directio quantitatis mutatur ſemel, vel numero mutationum impari, quæ poſſet etiam *Antianalogia* dici. Primario analogiæ genere analogæ ſunt in fig.239 omnes rectæ MO inter ſe, rectæ M1N1, & M2N2 inter ſe, ac N1O1, & N3O3 inter ſe, pariter in fig.9, 10, 11 radii foci FM inter ſe, chordæ VF*u* ductæ per focum inter ſe, quæ directionem ſervant. Hoc itidem genere primario analogiæ analoga ſunt quadrata rectarum directionem mutantium, quæ eam juxta num.684 bis mutant. Et vero etiam primario analogiæ genere analogus eſt axis tranſverſus Ellipſeos finitus M*m* cum axe Hyperbolæ M ∞ *m* per infinitum traducto, qua expreſſione exprimimus lineas, quæ

a quibuſdam punctis ut M, & m tendentes ad partes oppoſitas ipſis, ut hic verſus H, & b, concipiantur conjunctæ quodammodo, & connexæ in ipſo infinito, iuxta ea, quæ jam toties vidimus. Secundario analogiæ genere analogæ ſunt in fig. 239 rectæ N_1O_1, N_2O_2, ac M_1N_1, M_3N_3; in fig. 9, & 11 foci radii Fm inter ſe, axes finiti Mm inter ſe, & alia ejuſmodi, quæ directionem habent contrariam poſt tranformationem, ut etiam ſolida ſub tribus lineis quibuſcumque directionem mutantibus. Porro diverſa axium Ellipſeos, & Hyperbolæ analogia, ac permutatio axis finiti cum axe per infinitum traducto ita, ut axi Ellipſeos finito MCm directe reſpondeat Hyperbolæ axis, non finitus MCm, ſed M ∞ m per infinitum traductus, & viceverſa, patent ex eo, quod dum ratio determinans perpetuo creſcit, vel coni ſectio perpetuo inclinatur poſt parallelifmum cum baſe, & Ellipſis accedit ab Parabolam, axis MCm perpetuo oblongatur, & vertex m poſt tranſitum per Parabolam ita regreditur ex parte oppoſita, ut perimeter curvæ retro non redeat in orbem ab M ad m, ſed verſus eandem plagam in infinitum abeat, & ſuperato veluti infinito, eadem directione pergat regrediens ex parte oppoſita. Hinc nimirum per quodvis punctum R finiti axis MCm figuræ 9, & axis M ∞ m per infinitum traducti figuræ 11 ducta recta axi perpendicularis occurrit perimetro in binis punctis P', p juxta num. 36; contra rectæ, quæ tranſeunt per puncta R axis M ∞ m Ellipſeos, & MCm Hyperbolæ nuſquam oc-

occurrunt perimetro: uſque adeo axi MC*m* illius reſpondet directe axis M ∞ *m* hujus, & viceverſa.

762. Etiam in punctis, ſi ea determinentur
a binis rectis tendentibus ad eandem plagam, di- F.35
cemus ipſa analoga primo analogiæ genere; ſi 36
ad oppoſitas, ſecundario. Puncta P definita 19
(num.130) in fig.35, & 36 a rectis FQ, VG 20
tendentibus utrobique in eandem plagam ſunt analoga primario analogiæ genere, puncta *p* ſecundario, cum ipſum *p* in fig.35 definiatur a rectis QF, *g*V coeuntibus ad partes FV reſpectu G*g*, & in fig.36 ad partes oppoſitas. Pariter in fig.19, & 20 ſunt analoga ſecundario analogiæ genere puncta *m*, ſaltem ſi ipſum *m* in Hyperbola in fig.20 concipiatur, ut vertex axis finiti M*m*; ſi enim concipiatur, ut vertex axis M ∞ *m* per infinitum traducti, poterit concipi, ut primario analogiæ genere analogum ipſi *m* figuræ 19. Centrum quoque C Ellipſeos in fig.19, cum centro C Hyperbolæ in fig. 20 erunt analoga ſecundario analogiæ genere, cum inveniantur in medio itinere ab M ad *m* verſus partes oppoſitas. At axis Hyperbolæ per infinitum traductus habebit in ipſo infinito aliud centrum ∞, quæ eſt infiniti nota, ut & axis Ellipſeos M ∞ *m* aliud centrum ∞ juxta num.254, eritque analogum primo analogiæ genere centrum finitum Ellipſeos C, quod ejus axem finitum MC*m* ſecat bifariam, cum centro Hyperbolæ infinito ∞, quod ſecat bifariam ejus axem M ∞ *m* traductum per infinitum, & centrum ∞ Ellipſeos

cum centro Hyperbolæ C. Ejus permutationis centrorum diſcrimen manifeſto ſe prodit ipſam Ellipſeos, ac Hyperbolæ formam conſideranti. Ellipſis obvertit cavitatem centro C, convexitatem centro ∞ utrinque, & ſecatur a recta per C ducta perpendiculari axi in binas æquales, ac ſimiles Semiellipſes ſpectantes hiantibus veluti buccis plagas MFC, *mf*C. Hyperbola obvertit convexitatem centro C, cavitatem centro ∞ utrinque, & in binos æquales, ac ſimiles ramos quodammodo ſecatur in infinito, quo rami ipſi excurrunt, qui ſpectant itidem hiatu cavo eaſdem plagas, ſed expreſſas per MF∞, *mf*∞. Ipſe ordo punctorum rem prodit. Nam in Ellipſi incipiendo ab M proceditur in fig. 19 ſic, MFC *fme* ∞ EM; in Hyperbola vero in fig. 20 ſic: MF∞ *fme*CEM, ubi C, & ∞ ſedes permutant. Hinc nimirum in Ellipſi quævis recta per C ducta occurrit perimetro bis, nulla in Hyperbola ducta in iis aſymptotorum angulis, quos ſectat axis conjugatus. Nulla in Ellipſi contingit perimetrum per C ducta: in Hyperbola habentur pro tangentibus aſymptoti, in quas tangentes deſinunt juxta num. 288, ubi contactus ita in infinitum abeant, ut nuſquam jam ſint. Hinc Hyperbola aſymptotos habet, Ellipſis non habet; adeoque tam multis, & elegantiſſimis ſane aſymptotorum proprietatibus Ellipſis caret.

763. Expoſitis hiſce nominum definitionibus, jam ad canones ipſos faciemus gradum, in quavis geometricarum conſtructionum transformatione adhibendos.

764. Ca-

764. Canon I. *Si quantitates, a quibus ſolutio problematis pendet, vel enunciatio theorematis, maneant omnes poſt transformationem analogæ primo analogiæ genere, nec ullus habeatur tranſitus per infinitum; manebit eadem ſolutio, enunciatio, demonſtratio, nulla re, nullo verbo mutato. Quod ſi aliquæ ex iis per infinitum traductæ, & in ipſo infinito copulatæ, ac connexæ inter ſe concipiantur, extante utroque extremo; in iis, quæ a ſola directione pendent, manebunt itidem omnia; in iis, quæ ad magnitudinem pertinent, cenſeri debet earum ratio eadem, quæ oritur ex ea lege, qua determinantur, prorſus analoga illi, quam haberent, ſi per infinitum non tranſiſſent.*

765. Prima canonis pars omnino patet ex eo, quod omnes Geometricorum Locorum partes debeant eaſdem proprietates habere; & cum nullus fiat tranſitus per infinitum, vel per nihilum, nulla mutatio fit, quæ perturbet vulgarem geometricum ſermonem, quantitatibus vel infinitis, aut per infinitum traductis uſque ad finitum oppoſitum, vel negativis, & minuentibus ſummam. Et id quidem prorſus cogruit cum num. 674 & 675. In fig. 239, quotieſcumque punctum N fuerit inter C, & H, ut N1, conſtructio problematis propoſiti num. 676 inveniendi ſummam MN, NO æqualem rectæ datæ, enunciatio ſummæ inventæ, demonſtratio, eadem erit ubique, nec mutabitur niſi puncto N egreſſo ex illis limitibus aliquæ quantitates directionem mutent. F. 239

766. Idem videre licet etiam in noſtris Se-

ctionum Conicarum Elementis. Nos ea ita adornavimus, ut in iis, quæ ad ipſam curvarum naturam contemplandam, & proprietates deducendas pertinent, reducerentur omnia ad unicum problema geometricum, cujus generalis ſolutio, & applicatio ad caſus particulares, vel per ſe ipſa, vel per ea, quæ inde ſponte conſequerentur, proprietates omnes harum curvarum elementares exhiberet. Vidimus nimirum ea fere omnia, quæ in earum elementis circumferri ſolent, contineri comparationibus rectarum, quæ ipſis occurrunt, vel earum poſitione conſiderata, vel magnitudine, a qua pendent ſummæ, differentiæ, rationes ad ſe invicem, quadrata, rectangula, eorumque relationes tam variæ. Quamobrem ſelegimus ejuſmodi definitionem, quæ omnibus hiſce curvis generaliter conveniret, expreſſam ratione conſtanti, quam habet diſtantia puncti cujuſvis perimetri a dato puncto, ad diſtantiam perpendicularem a data recta: tum inveſtigavimus ſolutionem hujuſmodi generalis problematis. *Datis foco, directrice, & ratione determinante, invenire concurſum rectæ datæ cujuſvis cum Sectione Conica.* Soluto generaliter hoc problemate, ſatis patebat, in ipſa ſolutione contineri debere fundamenta omnia omnium relationum, quas rectæ ejuſmodi concurſibus interceptæ habere poſſent ad ſe invicem, & cum ipſa perimetro Conicarum Sectionum; dummodo ex generalibus Locorum Geometricorum tranſformationibus rite ipſa generalis conſtructio ad caſus ſingulares applicaretur.

767. Por-

767. Porro illud contigit, ut in ipſa illa generali conſtructione quædam rectarum interſectiones, a quibus punctorum quæſitorum determinatio pendebat, vel iis rectis evadentibus parallelis, ita in infinitum abierint, ut nuſquam jam eſſent, vel iis rectis congruentibus, haberi non poſſent, fruſtrata generali ipſa ſolutione; quorum primum accidit in rectis directrici parallelis, ſecundum in rectis per focum tranſeuntibus. Quamobrem pro iis ſubſtituimus bina particularia problemata, ad quorum ſolutiones quo pacto illa generalis ſolutio nos perduxerit, in ſequentium canonum applicatione, ubi nimirum ad eas ejuſmodi transformationes pertinuerint, oſtendemus. Atque iccirco problema generale ad propoſitionem tertiam rejecimus, reliquis illis, quæ ipſo generali non indigerent, præmiſſis in præcedentibus binis propoſitionibus, ubi etiam, quæcumque ad Conicarum Sectionum proprietates pertinentia ſe ultro offerrent, deduximus. Tum ex generali problemate multo uberiores fructus percepimus alia ex aliis theoremata deducendo, ipſa etiam, ubertate ſane admirabili, fœcundiſſima quaquaverſum.

768. Jam vero in ſingulis hiſce, vel problematum ſolutionibus, vel theorematum enunciationibus, vel demonſtrationibus utrorumque, patebit ſanè illud eadem conſideranti, ubicumque nihil directionem mutat, nihil abit in infinitum, nec per infinitum traducitur, vim conſtructionis, & enunciationem ipſam, ac verba omnia prorſus eadem eſſe ubique, ſive conſiderentur di-

verſæ partes ejuſdem perimetri ejuſdem Sectionis Conicæ, ſive conferatur perimeter unius Sectionis Conicæ cujuſcumque cum perimetris aliarum quarumcumque vel magnitudine tantum, vel & magnitudine, & ſpecie, & forma differentium. Ejuſmodi exempla ubique occurrunt. Eadem eſt in fig.9, 10, 11 determinatio puncti M, ſecta FE in M in ratione determinante, eadem puncti V, vel *u*, capta FV, vel F*u* ad FE in ipſa ratione determinante juxta num. 35. Eadem in fig.35., & 36 determinatio cujuſvis puncti P per totum arcum VM*u* in quavis Sectione Conica, capta juxta num. 130 QG ad partes oppoſitas FV æquali QF, per interſectionem rectarum VG, FQ, & eadem iiſdem verbis demonſtratio deſumpta e ſimilibus triangulis FPV, QPG, quæ ubique demonſtrantur ſimilia ob angulos ad verticem P æquales oppoſitos, & angulos ad baſim FV, alternos angulorum ad baſim QG, adeoque æquales. Pariter theoremata communia iiſdem verbis efferentur. Chorda VF*u* in iiſdem figuris erit ubique latus rectum principale juxta num.54, ac eodem ubique modo accipietur. Chorda, quam circulus oſculator intercipiet e diametro per punctum oſculi tranſeunte, erit ubique juxta num.503 æqualis lateri recto ejuſdem diametri. In omnibus ejuſmodi caſibus ſatis erit puncta homologa deſignare litteris iiſdem ubique, & eædem prorſus demonſtrationes obvenient.

769. Secunda pars hujus Canonis, quæ eſt de lineis per infinitum traductis, pertinet ad infiniti myſteria quædam, quæ ad analogiam quan-

dam

dam retinendam hic adhibemus, licet infra eo deveniendum ſit nobis, ut ipſum infinitum habeamus potius pro impoſſibili. Idcirco adjecimus, *ſi aliquæ ex iis per infinitum traductæ.... concipiantur*. Nimirum ſi eàs hoc pacto concipimus, debemus etiam in iis generales illas rationes admittere, quæ habentur in omnibus aliis analogis, eadem nimirum lege cum eadem directione definitis per conſtructiones eaſdem, ad quas analogas Geometria humanæ mentis extenditur. Nam ſi infinitum extenſum eſt poſſibile, id quidem humanæ mentis vires omnino excedit, quæ in eo abſurda quædam demum invenit, quæ cum recta ratione nullo modo conciliari poſſe videantur. Adjecimus autem illud, *extante utroque extremo*, ut diſtingueremus quantitates haſce per infinitum traductas, ac proinde quodammodo veluti pluſquam infinitas, quarum nimirum extrema ſunt alicubi, & poſſunt perſpici, ab illis, quæ ſimpliciter in infinitum abeunt, altero ſaltem extremo nuſquam jam exiſtente.

770. Illud, quod in hac ſecunda hujuſce Canonis parte pertinet ad directionem rectæ per infinitum traductæ, manifeſtum eſt in illa inſigni Conicarum Sectionum proprietate, quæ earum focis nomen dedit, quam num. 202 expoſuimus. Radii ex foco F egreſſi in Ellipſi in fig. 66 poſt reflexionem in punctis P, *p* debent abire per rectas finitas P*f*, *pf* convergentes ad punctum *f* ex parte finita. Ii in Parabola in fig. 67, abeunte foco *f* in infinitum ita, ut nuſquam jam ſit, evadunt paralleli inter ſe, quod pertinet ad unum F. 66 67 68

e ſe-

e ſequentibus Canonibus. At in Hyperbola in fig. 68 abeunt per rectas P ∞ *f*, *p* ∞ *f*, quæ ſunt analogæ primario genere analogiæ finitis P*f*, *pf* Ellipſeos, & quodammodo velut convergunt itidem ad ipſum *f* ex parte infiniti. Sed quoniam in vulgari geometrico ſermone non adhibetur nota infiniti, nec rectæ conſiderantur in infinitum traductæ, apponenda fuit littera O, quæ vices ipſius ∞ ſuppleret, & convergentiæ ex parte infiniti ſubſtituenda divergentia ex parte finiti. Atque eodem pacto ſi in fig. 68 poſſent lucis radii ex *f* egreſſi ſuperato infinito deferri ad puncta P, *p*, ad quæ nimirum advenirent per rectas OP, *op*; colligerentur in F, ut in figura 66 radii *f*P, *fp* in ipſo foco F colliguntur.

771. Ex hac hujus Canonis parte debent in fig. 20 in Hyperbola diſtantiæ focorum F ∞ *f*, verticum M ∞ *m*, directricum E ∞ *e* per infinitum traductæ haberi pro continuè proportionalibus inter ſe, & diſtantiæ F∞, M∞, E∞, inter ſe in ratione deteminante, ut in ratione determinante ſunt in fig. 19 continue proportionales FC*f*, MC*m*, EC*e*, & EC, MC, EC juxta num. 90. Videtur hoc ingens quoddam infiniti myſterium. Debet enim concipi arcus illius circuli infiniti, cui reſpondet F ∞ *f* major arcu illius, cui reſpondet M ∞ *m*, & hic arcu E ∞ *e* in illa ratione, quam habet in ipſa fig. FM ad ME, quæ a ratione æqualitatis poteſt diſtare utcumque, ut poſſit eſſe dupla, decupla, centupla, & ita porro. Quare fieri poteſt, ut ille arcus primus ſe-

Digitized by Google

ſecundi, & hic tertii haberi debeat duplus, decuplus, centuplus. At id diſcrimen provenire non poteſt ab illis EM, *em*, vel MF, *mf* adjectis, quæ potius præſtarent primum arcum minorem ſecundo, ſecundum tertio. Debet igitur concipi ille circulus primus in infinito ipſo extenſus longe ultra ſecundum, ſecundus longe ultra tertium, ita, ut illud ∞ in aliis ejuſmodi circulis in alia diſtantia infinita ſit, pro conditione, & natura rectarum, quæ per infinitum traductæ concipiantur. In fig. 19 FC*f* eſt minor, quam MC*m*, & MC*m* minor, quam EC*e*. Oblongata Ellipſi, dum ratio determinans continuo creſcit, creſcit etiam ejuſmodi ratio, quæ dum Ellipſis ad Parabolam appellit, evadente ratione determinante ratione æqualitatis, evadere & ipſa debet ratio æqualitatis, ut infra videbimus. Mutata Ellipſi in Hyperbolam in fig.20, & traductis per infinitum punctis *e*, *m*, *f*, abit ratio determinans in rationem majoris inæqualitatis, quæ perpetuo creſcit, dum puncta ipſa accedunt ad E, M, F ex parte oppoſita. Quare debent concipi & illi veluti arcus F ∞ *f*, M ∞ *m*, E ∞ *e* in illis immenſis, & noſtræ menti imperviis quibuſdam infiniti ipſius veluti campis extenſi per tractus diverſos reſpondentes rationi illi, abeunte duplo, decuplo, centuplo longius illo ∞ pertinente ad F*f*, quam abeat illud, quod pertinet ad M*m*, & hoc totidem ſpatiis longius, quam id, quod pertinet ad F*e*. Hoc infiniti myſterium uſui nobis erit infra, & ubi etiam binæ rectæ in infinitum recedunt, limite ſaltem altero relicto in ipſo infinito, patebit

bit infra, debere pariter concipi alteram altera longiorem in ratione quacumque. Quin etiam fieri poſſet, ut ad analogiam ſervandam infinitum infinito etiam infinities majus, ſive in ratione, quam habet infinita quantitas ad finitam, finita ad nihilum, haberi debeat. Sed hæc de primo Canone ſatis; jam ad ſecundum;

772. Canon. 2. *Si aliquæ quantitates maneant analogæ ſolo ſecundario analogiæ genere, computandæ erunt in enunciationibus, & demonſtrationibus negativo modo eæ, quæ directionem mutarunt numero impare mutationum, ut nimirum ſi e binis altera tantum mutetur eo pacto, ſumma abeat in differentiam, quæ pro poſitiva habeatur, vel pro negativa, prout ea, quæ mutavit, erat minor, vel major, & viceverſa: ſi mutetur utraque, ſummæ, & differentiæ remaneant pariter ſummæ, & differentiæ, ſed e poſitivis in negativas abiiſſe cenſeantur, ubi ad ulteriora vel theoremata, vel problemata adhibendæ ſint. In demonſtrationibus vero per proportiones inſtitutis argumentationi per compoſitionem ſubſtitui debet argumentatio per diviſionem, & viceverſa, ubi e binis terminis rationis tam primæ, quam ſecundæ abierit in negativum alter tantummodo; retinendum argumentationis genus, ſi uterque mutet rationis utriuslibet.*

773. Quæ ad hunc pertinent Canonem conſequuntur omnia ex iis, quæ ſupra vidimus. Habenda eſſe pro negativis ea, quæ poſitionem mutant numero vicium impare, manere, quæ mutant numero pari, conſtat ex num. 688. Negativa

tiva mutare ſummam in differentiam, conſtat ex iis omnibus, quæ demonſtravimus a num.677 ad 692. Mutatio modi argumentandi patet ex eo ipſo, quod ſummæ in differentias migrent, & viceverſa, ubi alter e binis terminis mutatur in negativum. Ejus rei exemplum adductum eſt num. 691. Alia exempla exhiberi poſſunt plura etiam in Sectionum Conicarum Elementis. En aliqua.

774. In Ellipſi in fig.19 eſt (num.92) ſumma binarum rectarum, quæ a binis focis F, *f* ducuntur ad quodvis punctum perimetri P conſtanter æqualis axi M*m*. In Hyperbola in fig.20 æqualis eſt axi M*m* earum differentia, quia nimirum P*f* F. 19
directionem mutavit, cum punctum *f* Ellipſeos 20
abierit in *f* Hyperbolæ per infinitum, unde fit, ut recta P ∞ *f* Hyperbolæ ſit analoga primo analogiæ genere rectæ P*f* Ellipſeos. Cum vero P*f* negativa ſit major, quam PF, ſumma ipſarum, quæ in vulgari ſermone geometrico eſt differentia, evadit negativa, & idcirco axis M*m* ipſi differentiæ æqualis negativus eſt reſpectu axis Ellipſeos.

775. In demonſtratione autem ejuſdem proprietatis facta num. 93 ſummæ, quæ habentur pro Ellipſi, mutantur in differentias pro Hyperbola. Cum nimirum ſit FP ad PD, & *f*P ad P*d* in ratione determinante, ſive juxta num.90, ut M*m* ad E*e*, eruitur ſummam FP, *f*P in Ellipſi, differentiam in Hyperbola ad D*d* ſummam ibi, hic differentiam ipſarum PD, P*d* eſſe, ut M*m* ad E*e*, adeoque ut D*d*, E*e* æquantur, æquari illam ſummam, vel differentiam ipſi M*m*. Theorema autem nu-

numeri 90 ibi ſuppoſitum, quod Ff, Mm, Ee ſint continuo in ratione determinante, quod num. 91 demonſtravimus ex natura proportionis harmonicæ, poterat demonſtrari mutando differentias, quæ habentur pro Ellipſi, in ſummas pro Hyperbola, & viceverſa hoc pacto. Eſt Ff in Ellipſi differentia, in Hyperbola ſumma ipſarum FM, fM, eſt Mm differentia in Ellipſi, ſumma in Hyperbola ipſarum ME, Me, ſive me, Me. Eadem Mm ſumma in Ellipſi, differentia in Hyperbola ipſarum FM, fM, ſive fm, fM, & Ee ſumma in Ellipſi, differentia in Hyperbola ipſarum ME, Me. Hinc cum ſit & FM ad ME, & fM ad Me in ratione determinante, colligitur & antecedentium ſummas, vel differentias ad conſequentium ſummas, vel differentias, nimirum Ff ad Mm, & Mm ad Ee fore in eadem ratione. Mutatio directionis rectarum fM, Me mutationem induxit in ſummas, & differentias.

776. Porro ex ipſis infiniti myſteriis, nimirum e nexu illo in infinita diſtantia, de quo jam toties injecta eſt mentio, reddi poteſt ratio, cur etiam ubi directiones quantitatum mutantur vi tranſitus per infinitum, adhuc pro negativis haberi debeant, & ſubtrahi, licet illæ poſitivæ non mutentur in has negativas, ſed in illas per infinitum traductas, quæ ſunt harum veluti complementa ad circulum infinitum. Summa ipſarum FP, Pf in fig. 19 eſt conſtans, & æqualis axi Mm. In fig. 20 ipſi Pf eſt analoga primario analogiæ genere recta per infinitum traducta $P\infty f$. Quare adhuc ipſarum PF, $P\infty f$ ſumma pro conſtanti habenda erit. Quantum igitur creſcit FP tantum

minui

minui debet ipſa P ∞ *f*, quæ cum ea conſtantem ſummam reddit. Tantundem igitur debet creſcere *f*P complementum ipſius P ∞ *f* ad illum infinitum circulum, qui hic habetur pro conſtanti; ac proinde FP, *f*P æque creſcent, & earum differentia ſemper manebit conſtans. Abeunte P in M, ea differentia erit eadem, ac differentia FM, *f*M, ſive *fm*, *f*M, nimirum M*m*. Hoc pacto ab illa ſumma Ellipſeos fit tranſitus ad hanc Hyperbolæ differentiam ex ipſis infiniti myſteriis. Sed rem ita ſe habere debere conſtat ex ipſa conformitate omnium partium Locorum Geometricorum, quæ communes proprietates habere debent, dummodo ſi directio contraria ſit, contrario modo accipiantur, demendo, quod addebatur, & addendo, quod demebatur. Sic in fig.89 arcus illi FB*m*, & FA*m* juxta num.277 communes proprietates habent, nec F. 89
alter in tres partes æquales ſecari poteſt, quin ſecetur & alter, licet alter alterius negativus ſit: & idcirco ſi ab FP triſecante primum deveniendum ſit ad F*p* triſecantem ſecundum non gyrando per B*m*P'A*p*, quo pacto in *p* triſecatur arcus FB*m*AFB*m*AFB*m*, non arcus ipſe FA*m*, ſed retro regrediendo per PF*p*; mutatur directio tam arcus FP, in arcu F*p*, quam chordæ in chorda.

777. Canon. 3, *Si in aliqua proportione termini aliqui poſt transformationem maneant analogi ſecundario analogiæ genere, manebit proportio: ſed in proportionibus utcumque compoſitis nunquam mutatio habebitur, niſi numero pari, in rectangulis, vel ſolidis æqualibus debebit, vel in omnibus haberi mutationum numerus par, vel impar*

in

in omnibus, & terminus, qui invenitur proportionibus quibuſcumque, vel quovis ductu, cenſendus erit negativus, vel poſitivus, prout mutationum numerus fuerit in iis, a quibus pendet, impar, vel par.

778. Proportionem debere manere poſt mutationem directionis, qua analogia primaria in ſecundariam vertitur, patet ex eo, quod etiam num.776 uſi ſumus, quod nimirum omnes partes eorundem Locorum Geometricorum eaſdem proprietates, & relationes ad ſe invicem habere debeant, ſive aſſumantur ex parte poſitiva, ſive ex parte negativa. Sic in fig.89 nullus ex arcubus tendentibus ab F ad *m* per B triſecari poteſt juxta num.776, quin ſimul triſecentur conſtructione eadem reliqui omnes, qui ab eodem puncto F tendunt ad *m* contraria directione per A.

779. Terminum, qui invenitur proportionibus quibuſcumque, vel ductu quovis, fore negativum, vel poſitivum, prout numerus mutationum fuerit impar, vel par, demonſtratum eſt num.688, & confirmatum deinde tam multis exemplis e Geometria petitis. Inde autem conſequitur, in proportionibus utcumque compoſitis nunquam mutationem haberi poſſe niſi numero pari. Nam ſi præcedentes mutationes fuerint numero impari, accedet mutatio poſtremi, quæ complebit numerum parem, ſi autem mutationes præcedentes fuerint pares, manebit poſtremus terminus, adeoque iterum manebit numerus par. Rectangula autem, vel ſolida æqualia, debent habere numerum mutationum, vel ſimul imparem, vel ſimul parem,

quia

quia ſi alterum haberet imparem, alterum parem; alterum evaderet negativum, alterum poſitivum remaneret, adeoque non poſſent remanere æqualia. Idem autem ex priore parte eruitur etiam hoc pacto. In rectangulis æqualibus eſt unum latus prioris ad unum poſterioris, & in ſolidis planum ſub binis lateribus prioris ad planum ſub binis poſterioris, ut reliquum latus poſterioris ad reliquum prioris. Hinc in ejuſmodi proportione numerus mutationum erit ſumma mutationum utriuſque rectanguli, vel ſolidi. Ut ea ſit numerus par, debebit in utroque rectangulo, vel ſolido eſſe ſimul par, vel ſimul impar. Nam par pari, & impar impari additus parem reddit, par impari imparem. Patent igitur omnes propoſiti Canonis partes.

780. At hic in ipſa prima parte hujus Canonis videtur occurrere difficultas, quæ ſolutionem non ita facile admittat. Sex haberi poſſunt in proportione aliqua conſtante quatuor terminis binaria terminorum ipſorum. Vel enim ſumi poſſunt bini rationis primæ, vel bini rationis ſecundæ, vel primus cum tertio, vel ſecundus cum quarto, vel bini extremi, vel bini medii, qui mutentur. In primo, ac ſecundo caſu erit termini negativi ad negativum eadem ratio, quæ poſitivi ad poſitivum, in quo nulla eſt difficultas. In tertio, & quarto erit negativus ad poſitivum, ut negativus ad poſitivum, vel poſitivus ad negativum, ut poſitivus ad negativum, in quo pariter difficultas eſt nulla. At in poſtremis binis oportet ſit negativus ad poſitivum, ut poſitivus ad nega-

tivum, vel poſitivus ad negativum, ut negativus ad poſitivum, quod eodem redit permutato rationum æqualium ordine. Id vero videtur omnino pugnare cum analogia, & quidem etiam cum modo, quo negativa concipimus. Ea nimirum concipiuntur in aliqua ratione minora nihilo. Si facultates conſiderantur, debitum, quod eſt negativum, pejoris conditionis hominem reddit, qnam ſi nihil haberet. Si conſiderentur progreſſus, pejoris conditionis eſt ille, qui regreditur, quam iile, qui ſtat. Ablatis 8 a 10 relinquuntur 2, ablatis 10 relinquitur nihil, ablatis 12 relinquuntur duo minus, quam nihil. Secunda conditio eſt pejor primâ; igitur & tertia conditio ſecundâ eſt pejor. Quamobrem ratio quantitatis negativæ ad poſitivam eſſe debet multo minor, quam nihili ad poſitivam ipſam, ratio autem poſitivæ ad negativam multo major, quam poſitivæ ad nihilum. Non igitur æquales eſſe poſſunt.

781. Hæc quidem difficultas ſummam, ſi rite rerum analogia conſideretur, vim habet. At ejus ſolutio pendet ex hiſce infiniti myſteriis, quæ perſequimur, & ex iis potiſſimum, quæ

F.265 num.753 vidimus in fig.265. Ibi enim notavimus tertiam continue proportionalem poſt CM' conſideratam ut negativam, in quam abierit poſitiva CM poſt nihilum habitum in appulſu M ad C non eſſe CP' finitam, ſed C B ∞ A P' per infinitum traductam, & qnodammodo veluti pluſquam infinitam. Hinc ut finita quantitas CM ducta in finitam CP reddit rectangulum æquale quadrato CO, ita quodammodo nihilum in infinitam ductum

ctum, ubi M abit in C , & P in infinitum ita , ut nuſquam jam ſit, & negativa CM' in quantitatem pluſquam infinitam ducta, idem producat.

782. Idcirco autem illud in Geometria ubique ſanctè obſervabitur , ut in hiſce poſtremis binis caſibus ſemper , ſi alter e binis terminis abeat in negativum tranſeundo per nihilum, alter abeat tranſeundo per infinitum, dum in reliquis vel ambo tranſibunt per nihilum, vel am- F.243
bo per infinitum. Dum fig. 243 abit in 244, e 244
quatuor terminis proportionalibus illius CH, CF, 245
CI, CG primus , & quartus abeunt in negati- 244
vum. Sed puncto H accedente ad C, & decre- 254
ſcente angulo CIH in fig.243 , adeoque creſcente CHI , punctum G recedit a C ita , ut congruente IH , cum IC , & facta FG parallela CE , punctum G in infinito obrutum deliteſcat; tum procedente H in fig. 244 redit G ex parte D ex infinito. Pariter in fig.254 , ſi ea referat Hyperbolam conicam, in qua rectangulum ſub VR, & & RP eſt conſtans, adeoque VR ad VA, ut AB ad RP, tranſeunte VR in negativam per nihilum, tranſit RP in R2P2 per infinitum, ut adeo illis CG, PR figuræ 243, & 254 non reſpondeat CG figuræ 244. & R2P2 figræ 254, ſed illi C ∞ G huic R 2 ∞ P2. Generaliter ut rectangulum ſub extremis æquetur rectangulo ſub mediis, ſemper manentibus finitis alterius lateribus, & altero alterius latere tranſeunte per nihilum, alterum latus alterius tranſibit per infinitum, cum, ut paullo infra patebit, altero evaneſcente, alterum debeat evadere infinitum : adeoque quodammodo fiet

Bb 2 pluſ-

Digitized by Google

pluſquam infinitum ex ea parte, ex qua in infinitum receſſerat. At ubi figura 243 abeat in 245, facile patebit tranſeunte CH per nihilum, vel per infinitum motu rectæ IH circa I, tranſire debere pariter GF per nihilum, vel per infinitum ſimili motu rectæ GF circa G, & idem accideret, ſi recta HI tranſiret motu parallelo ad partes BD per C, vel per infinitum, tranſeuntibus H, & I ſimul per C, vel per infinitum.

783. Licet autem ubi agitur de proportione, terminus quartus poſt quantitatem negativam CM', & binas poſitivas CO ſit C ∞ P' per infinitum traductus in fig. 265; tamen cum hæc traductio haberi non poſſit niſi P' redeat ex parte oppoſita,
F.265
& alicubi in finitis quantitatibus exiſtat; ſecum trahit neceſſario diſtantiam CP' finitam directionis oppoſitæ, & conformis directioni CM', quæ, ſi puræ magnitudines ſpectentur, vel eæ conſiderentur ut poſitivæ, libera enim eſt plaga poſitivorum, eaſdem habebunt relationes ad ſe invicem, & ad eandem CO, quam prius habebant ſegmenta CM, CP ejuſdem Loci Geometrici eodem modo definita; adeoque adhuc erit CM' ad CO, ut CO ad CP' finitam, & proportio quidem manebit, directio autem in ejuſmodi finitis quantitatibus in oppoſitam plagam tendentibus erit iterum eadem priori contraria. Idcirco proportio manebit etiam inter ejuſmodi quatuor quantitates, quarum mediæ directionem non mutarunt, mutavit prima, &quarta quoque aſſumpta ex parte finita contrariam priori habet; adeoque in ſummis habenda erit etiam ipſa pro negativa,

re-

reductione aliqua ſimili ei, quam num.776 conſideravimus in complemento ejuſmodi ad circulum infinitum ejus quantitatis per infinitum traductæ, quæ analoga erat primo analogiæ genere.

784. Ubi vero uterque terminus per nihilum tranſit, nulla difficultas eſſe poteſt, cum præcedentes termini, qui habebantur ante transformationem, migrarint in hos ipſos negativos, ac ubi mutatio fit tranſeundo per infinitum, facile ratio redditur rationis manentis ex illo infiniti myſterio, quod num.776 perſecuti ſumus; licet mutatione facta per infinitum, non ſuccedant prioribus terminis negativi illi finiti, ſed poſitivi per infinitum traducti. Si in fig. 243 recta FG abiret in infinitum ex parte AE, & regrederetur ex parte contraria DB in *fg*; illis CF, CG non ſuccederent C*f*, C*g*, ſed C ∞ *f*, C ∞ *g*. At quoniam harum ratio ſemper ob analogiam deberet eſſe eadem, etiam ſi *fg* appelleret ad C; idcirco juxta num.769 etiam integri infiniti circuli C A ∞ B C, C E ∞ D C debent concipi ad ſe invicem in eadem ratione CH ad CI. Quare ubicumque ſit *fg* ab integris circulis illis exiſtentibus, ut CH, CI demendo ſegmenta C A ∞ B *f*, C E ∞ D *g*, quæ ſunt in eadem ratione, relinquentur C*f*, C*g* in ratione pariter eadem. Quamobrem etiam conſiderata analogia primi generis in transformatione, eruitur adhuc quantitates ſecundario genere analogas, licet oriantur tranſitu limitis per infinitum, debere retinere proportiones, quas ante transformationem habuerant. F.243

 785. Et

785. Et hæc quidem ad explicandum canonem, ac ex Locorum Gemetricorum homogeneitate in omnibus ſuis partibus, vel ex infiniti myſteriis demonſtrandum, ac vindicandum dicta abunde ſunt. Cæterum canon ipſe, ubi de finitis quantitatibus agitur, certiſſimus omnino eſt, ac patet in omnibus tam multis exemplis, quæ adduximus a num.677 ad num. 706. Ex eo determinavimus ductum, & formam tot curvarum parabolici, ac hyperbolici generis, quas deinde conſtructione geometrica accurata invenimus ejuſdem formæ, quæ ex hoc canone iis applicato obvenerat. Patet autem latiſſime ipſius uſus per univerſam Geometriam. Pauca quædam attingemus, quæ pertinent ad ejus uſum in noſtris Conicarum Sectionum elementis.

F.1 786. In primis in ipſa definitione in fig. 1, & 2
2 tam FP ad PD, quam F*p* ad *pd* ſunt in eadem ratione determinante. F*p*, & *pd* in fig.2 ſunt analogæ ipſis F*p*, *pd* figuræ 1 ſecundario analogiæ genere, & tamen ſervant proportionem eandem FP ad PD, ut F*p* ad *pd*. Deinde in ea proportione abierunt in negativos bini termini ſecundæ rationis in tranſitu a figura 1 ad 2, nimirum habetur numerus mutationum par, & uterque terminus mutat tranſeundo per infinitum, cum arcus rami ulterioris, & cum eo punctum *p* regrediatur ex infinito.

F.19 787. In fig.19, & 20 eſt (num. 90) tam F*f*
20 ad M*m*, quam M*m* ad E*e* in ratione determinante FM ad ME. Manet utraque proportio, licet F*f*, M*m*, E*e* in fig. 20 ſint analogæ ſecundario ge-

genere analogiæ ipſis Ff, Mm, Ee fig. 19. In utraque proportione bini termini tantummodo mutant directionem, & cum ad eandem pertineant rationem, mutant ambo in tranſitu per infinitum.

788. In fig. 122 in qua rectangulum PLp æquatur (num. 330) rectangulo VLD, abeunte F.122
VL in VL' directione mutata, & manente L'D', debet mutari e poſitivo in negativum etiam rectangulum P'L'p'. Quare debet altera tantum ex ipſis P'L', L'p' directionem mutare. Mutat eam ſola L'P', ac in rectangulis æqualibus P'L'p', VL'D' invenitur numerus mutationum utrobique impar.

789. Hinc ex hoc ipſo principio in fig. 169, F.169
& 170 facile definiri poteſt plaga ad quam poni 170
debent illæ ia, Ip', quas num. 453 determinavimus in problemate, quo quæritur Sectio Conica tranſiens per data quinque puncta PpP'AB. Cum enim debeat eſſe (num. 299) rectangulum AQB ad rectangulum AIB, ut rectangulum PQp ad P'Ip', poſtremum hoc P'Ip' debet habere mutationes directionis numero pari, vel impari reſpectu AIB, ut PQp habet reſpectu AQB. Quare cum innoteſcant reliquorum omnium laterum directiones præter directionem lateris quæſiti Ip', hæc etiam innoteſcet. In fig. 169 AIB reſpectu AQB mutat ſolam AQ in AI, manentibus QB, & IB. Quare & P'Ip' reſpectu PQp debet habere unam mutationem. Mutavit P'I reſpectu PQ, manebit igitur Ip' reſpectu Qp, ut revera manet. Simile eſt argumentum pro Ip' manente in fig. 170, ac eodem pacto determinatur poſitio ia, quæ manet reſpectu qp in fig. 169, mutatur in fig. 170.

790. Canon. 4. *Angulo, cujus alterum erat tantummodo directionem mutavit, ſuccedit is, qui ejus eſt complementum ad duos rectos, ſive quem continet crus non mutatam cum crure mutato producto: angulo, cujus utrumque mutavit directionem, ſuccedit is, qui ipſi ad verticem opponitur, & ut enunciatio maneat, in crure quod directionem mutavit, communis aliqua littera apponenda eſt in binis caſibus ſita ad partes oppoſitas ita, ut altera jaceat ad partem puncti analogi ſecundario analogiæ genere, altera ad partem oppoſitam; in demonſtrationibus vero, ut & in enunciationibus cavendum ſemper, fieri poſſe, ut anguli, qui congruebant, fiant ad verticem oppoſiti, qui erat externus in parallelis, evadat internus, & oppoſitus, vel alternus; atque ea a numero mutationum pendebunt, ita tamen, ut in ſingulis caſibus admodum facile deprehendatur ſubſtitutio facienda in demonſtratione, notatis illis binis ſucceſſionum regulis. Generaliter autem ubi vertex anguli, qui erat intra binas parallelas, abeat extra; angulus ipſe enunciatus concurſu crurum cum iis parallelis hinc, & inde ad verticem oppoſitus, fiet communis, anguli vero crurum cum parallelis mutabuntur ex alternis in externos, ac internos, & oppoſitos, & viceverſa ſi punctum abeat inter parallelas. Quod ſi extra fuerit, & abeat extra, ſed ad partes alterius parallelæ, manebit ipſe angulus, & anguli ad parallelas, qui erant externi, fient interni, & viceverſa.*

791. Hujus canonis ratio eſt manifeſta; ubi enim,

enim, ut in fig.243 abeunte in 244, anguli cujuſpiam HCI crus alterum CH directionem mutet, angulus ipſe HCI, qui prius in fig.243 erat ACE, evadit jam in fig.244 ECB, quem continet crus mutatum CH prioris, ſive CA productum in CB, cum latere non mutato CI, vel CE. At in fig.246 mutato & CH, & CI, angulus ICH, qui congruebat in fig.243. cum ACE, jam congruit cum DCB ad verticem oppoſito. Quoniam vero punctum C jacet in fig. 243, 245, 246 extra parallelas HI, FG ad partes HI, in fig.244 inter eas; angulus HCI eſt in illis idem, ac FCG, in hac ad verticem oppoſitus, anguli vero CHI, CIH in illis externi, & CFG, CGF interni, & oppoſiti, in hac alterni. At ſi in illis HI recederet a C ultra FG, ſatis patet, ſtatim ipſos CFG, CGF ex internis evaſuros externos. F.243 244 245 246

792. Porro plurimum ſæpe proderit litteras apponere a transformatione non pendentes, quæ adhiberi poſſint ſine mutatione ulla, ut hic litteræ A,B,D,E plurimum proſunt ad plagas deſignandas, cum in fig.243 ponitur A ad partes H, & in fig.244 B ad partes H jam mutati, & A ad oppoſitas. Proderit autem id ipſum ſæpe ad habendam generalem enunciationem, ut jam videbimus, in Conicarum Sectionum elementis præſtitum a nobis eſſe cum ſucceſſu. Mutationes vero angulorum in oppoſitos ad verticem, vel externorum in alternos, vel internos vidimus ex parte num.690; videbibus jam uberius in ipſis Conicis Sectionibus.

793. Anguli mutatio tam ex alterius cruris, quam

quam ex utriuſque mutatione in Conicarum Sectionum elementis occurrit plurimis vicibus, cui & demonſtratio aliquando idcirco accommodanda fuit. In ſolutione probl: 2, num. 130, occurrit
F. 35 in fig. 35, & 36 determinatio puncti P per inter-
36 ſectionem rectarum VG, FQ, & puncti *p* per interſectionem rectarum V*g*, FQ, captis FV ad FE in ratione determinante, & QG, Q*g* æqualibus QF. In ejus autem demonſtratione conſiderantur *ſimilia* pro puncto P *triangula* FPV, QPG, *&* QPD, QFE, *ac inde eruitur* FP *ad* PQ, *ut* FV *ad* QG, *ſive* QF, *&* PQ *ad* PD, *ut* FQ *ad* FE, *unde infertur ex æqualitate ordinata* FP *ad* PD, *ut* FV *ad* FE *in ratione determinante, ut oportebat.* Hæc demonſtratio, ſi aſſumatur ſimilitudo triangulorum, nullum habet diſcrimen in figuris 35, & 36, juxta num. 764, licet altera ad quamvis Sectionem Conicam pertineat, altera ad ſolam Hyperbolam; quia omnia remanent primo analogiæ genere analoga, nullo termino directionem mutante, nec in infinitum abit quidquam, nec per infinitum traducitur. Transfertur ea demonſtratio ad punctum *p* iiſdem prorſus verbis, & litteris ponendo ſolum pro punctis P, G, D puncta *p*, *g*, *d* eorum analoga. Sunt nimirum *ſimilia triangula* FpV, Qpg, *&* Qpd, QFE, *ac inde eruitur* Fp *ad* pQ, *ut* FV ad Qg, *ſive* QF, *&* pQ *ad* pd, *ut* FQ *ad* FE; *unde infertur ex æqualitate ordinata* Fp *ad* pd, *ut* FV *ad* FE *in ratione determinante, ut oportebat*. Nulla autem mutatio fit in nomenclatura triangulorum, & proportionibus, ſive conferatur punctum *p* cum puncto P ejuſdem figu-

figuræ, ſive p cum p alterius, quia punctis, & rectis ſuccedunt puncta, & rectæ cum analogia vel primi, vel ſecundi generis; quamobrem rationes redeunt eædem juxta num. 772, & cum nulla argumentatio fiat componendo, vel dividendo, nullus fit tranſitus a ſummis, ad differentias, vel viceverſa, quæ textum demonſtrationis verbo aliquo immutent.

794. At ſimilitudinis triangulorum illorum demonſtratio turbatur nonnihil a mutatione directionis crurum in angulis. Angulo VFP in fig. 35 ſuccedit VFp, quem PF mutata continet, ſi producatur, cum PV non mutata. At directio FP, Fp communis in fig. 36, cum FV communi angulum VFP communem reddit cum angulo VFp. Contra angulus PQg idem eſt ac pQg in fig. 35 ob directionem Qp, QP eandem, & Qg utrobique eandem, ſed contrariam illi priori QG: at in fig. 36 pQg eſt ad verticem oppoſitus ipſius PQG, ob directionem Qp, Qg utramque oppoſitam directioni QP, QG. Comparando angulos FPV, QPG, habetur utrobique alter alteri ad verticem oppoſitus, at FpV, Qpg idem ſunt angulus mutatis in fig. 35 ſolis directionibus FP, VP, dum abeunt in Fp, Vp, & manentibus directionibus GP, QP, in Gp, Qp: at in fig. 36 mutatis contra directionibus GP, QP in gp, Qp, manentibus FP, VP in Fp, Vp, unde fit, ut alter ex angulis illis binis utrobique, dum fit tranſitus a P ad p, mutetur in angulum ſibi ad verticem oppoſitum, maneat vero alter, & proinde qui fuerant ad verticem oppoſiti, jam congruant. Demum anguli PFV, PVF

PVF ſunt utrobique alterni angulorum PQG, PGQ jacente P inter parallelas FV, GQ, at *p*FV, *p*VF, reſpectu *p*Q*g*, *pg*Q ſunt in fig. 35 externi, in fig. 36, interni, & oppoſiti cum jaceat *p* ibi ad partes FV hic ad partes *g*Q. Quoniam tamen ejuſmodi mutatio angulorum ex oppoſitis ad verticem in congruentes, & ex alternis in externos, ac internos, & oppoſitos, vel ex externis in internos, æqualitatem eorum non mutat, manebit demonſtrationis vis, & ſolum enunciatio mutabitur dicendo pro puncto P angulus FPV æquatur angulo QPG ad verticem oppoſito, & pro *p* angulus F*p*V, eſt idem, ac angulus Q*pg*; pro angulis vero ad FV, GQ, & FV, *g*Q poteſt dici tantummodo anguli ad ejuſmodi baſes ſunt ubique æquales ex pararallelarum proprietatibus, licet, ſi eæ proprietates enuncientur, mutari debeat expreſſio. Prorſus vero ſimilia obſervari poſſunt in comparatione triangulorum FEQ, PDQ, & FEQ, *pd*Q.

795. At ad evitanda incommoda directionis mutatæ in angulorum, & vero etiam rectarum enunciationibus, plurimum ſæpe nobis profuit alias adhibere litteras præter eas, quæ mutantur.
F. 1 Hinc illæ A, B in fig. 1, 2, & tam multis poſt re-
9 tentæ in directrice: hinc illæ GHIT, *gbit* conſtan-
25 ter retentæ in figuris a 9 ad 14, & 25, 26, 27.
41 Hinc in figuris poſt 41 puncta illa *z*, Z, & K, ac
aliis in locis. Id autem prodeſt multo etiam magis aliquando, ubi punctum aliquod ita in infinitum abit, ut nuſquam jam ſit. Sic præter ſuperiora exempla, in quibus hæc utilitas oſtendi po-

teſt

teſt, ubi figura 25 mutatur in 28 (num. 109) F. 25
& Ellipſis in circulum, puncto E illius abeunte in 28
infinitum ita, ut nuſquam jam ſit, fruſtra analogia quæreretur figurarum, niſi utrobique manerent litteræ Gg, Hh, Ii ab interſectionibus non pendentes, quæ poſt transformationem ſuperſunt.

796. Exempla litteræ adiectæ cum fructu enunciationis manentis habentur plura. Luculentiſſimum eſt in uſu litteræ V, quæ in figuris a 41
ad 45 adjecta eſt (num 172) rectæ HF, in prio- F. 41
ribus ad partes F in poſtrema ad partes H. Hac 42
arte obtigit ubique ex parallelarum natura æqua- 43
litas angulorum PFH, pFV cum angulis LTt, LtT 44
æqualibus inter ſe, licet ex diverſis parallelarum 45
proprietatibus profluat æqualitas ipſa juxta hunc ipſum canonem. Porro in figuris 41, 42, 43 tam FP inter ſe relatæ, quam Fp inter ſe, poſitionem ſervant, & proinde omnia eodem modo ſe habent; in figura 44 mutat directionem tam FP, quam Fp; hinc adhuc V jacet ad partes contrarias H. At in fig. 45 mutatur Fp, manet FP; hinc litterarum reſpondentium V, & H altera reſpectu alterius manentis mutari debuit, ut jam directiones FH, FV congruerent.

797. Hujuſmodi artificio auferetur etiam apparens quædam irregularitas, quæ videtur occurrere in theoremate expoſito num. 176. Ibi enunciatur, binas tangentes ductas ex extremis punctis chordæ tranſeuntis per focum concurrere in directrice, ibique continere angulum in Ellipſi acutum, in Parabola rectum, in Hyperbola obtuſum, ſi terminetur ad eundem ramum illa

chor-

F.50 chorda, iterum vero acutum ſi terminetur ad
53 binos ramos. Is angulus eſt in fig. 53, & 54
54 PHp. Porro ubi punctum p e ramo citeriore figuræ 53 abit in ulteriorem figuræ 54, non abit angulus ille ex obtuſo in acutum ſaltu quodam, ſed angulo PHp illius ſuccedit angulus, quem in hac contineret PH cum pH producta ad partes H, quæ nimirum pH directionem mutavit. Is eſt adhuc obtuſus, & excipiens poſtremum illum obtuſum PHp figuræ 53, qui habetur puncto p abeunte in infinitum, & tangente Hp in aſymptotum H2K2 fig. 50. Is per omnes continuos gradus mutatur, donec ad binos rectos accedat ultra quoſcumque limites, imminuto PHp acuto ita, ut abeuntibus P, p in vertices axis tranſverſi, & factis tangentibus parallelis, evaneſcat. Satis igitur fuiſſet in HP producta in fig. 53 ad partes p, in 54 ad partes H apponere litteram V, & enunciare ita: angulus PHV erit in Ellipſi acutus, in Parabola rectus, in Hyperbola ſemper obtuſus. Sed quoniam enunciatio, & demonſtratio ſine ejuſmodi productione rectæ evadebat ſimplicior, ſimplicitati analogiam poſtpoſuimus.

798. At ex hiſce exemplis jam patet, quam apte huiuſmodi artificio ſervetur ſæpe analogia, vulgari etiam Geometriæ ſermone adhibito. Nam ſi infiniti myſteria liberet adjicere, & rectas conſiderare per infinitum traductas, ac alia, quædam, quæ ſingula perſequi longum eſſet, admiſcere, theoromatis quoque inde provenientibus in Geometriam invectis; poſſent ſemper ipſa inter-

terſectionum puncta retinere caracteres ſuos, dummodo aliqua notula generaliter exprimi poſſet directio rectæ tendentis ad punctum, & magnitudo, quæ expreſſio communis eſſet etiam punctis in infinito latentibus, & lineis per infinitum traductis. Sic in fig.35 angulus *FpV* angulo *Qpg* erit adhuc oppoſitus ad verticem, ut FPV angulo QPG, ſi non ſumatur ex parte finita rectarum *Fp*, *Vp*, quæ directionem mutarunt, ſed ex parte illarum F ∞ *p*, V ∞ *p*, quæ per infinitum eadem directione traductæ concipiantur & in ipſa 54 adhuc obtuſus eſt angulus P H ∞ *p*, quem PH continet cum H ∞ *p* per infinitum traducta. Verum deeſt eiuſmodi geometricum idioma, & infiniti myſteria, ſi ipſum poſſibile ſit, noſtræ mentis captum excedunt adeo, ut ſæpe in iis analogia quædam conſiderari poſſit tantummodo, & uſus ad ea, quæ de finitarum magnitudinum relationibus mutuis habentur, generalius, & facilius eruenda, non vero ad ipſarum infinitarum, vel pluſquam infinitarum magnitudinum relationes ad ſe invicem evidenter perſpiciendas, & pari evidentia ex iis relationibus deducendas ſemper demonſtrationes theorematum ad finitam Geometriam pertinentium. Quædam ex iis inveſtigationi aptiora ſunt, quam demonſtrationi. Certi quidam tantummodo canones eruuntur, quod hic præſtamus, ex quibus rite ſtabilitis erui poſſit plerumque, quid poſt transformationem debeat in quantitatibus finitis relinqui. Ubi infinitis indefinita ſubſtituerimus alio tomo, multo ſane evidentius, & multo uberius patebunt omnia

F.35 54

omnia, quæ huc pertinerent. Sed de iis iterum infra. Interea geometrici idiomatis defectus etiam in ſequenti canone, & multo etiam magis ſe prodet.

799. Canon 5. *Ubi anguli hiatus ab altera plaga ad alteram tranſit, quod fieri poteſt vel tranſeundo per nihilum, vel tranſeundo per binos rectos, ſi accipitur is, qui ejuſmodi mutatione oritur tranſeundo per nihilum, habendus eſt pro negativo, & in ſummis negativo modo computandus ita, ut ſummæ in differentias abeant, altero tantum e binis mutato; at ſi eo abeat tranſeundo per binos rectos, angulo orto iuxta communem Geometriæ nomenclaturam debet ſubſtitui ejus complementum ad 4 rectos, qui ſi appelletur angulus convexus, vel ut aliqui ſolent, gibbus, ſæpe analogia multo melius ſervabitur.*

F.264 800. Dum recta CL in fig. 264 gyrat circa C cum recta CK efficit angulum KCL directione KLN; abeunte L in K, is evadit nullus: tum abeunte L in L', jam evadit negativus reſpectu KCL, hiatu KCL poſt tranſitum per nihilum abeunte in KCL' directione oppoſita KLO. Is creſcit, & fit rectus, ubi L' abit in O: tum ſi L' pergat ultra moveri in M; angulus KCM eſt adhuc ejuſdem directionis cum KCL', ſed obtuſus. Abeunte M in Q, jam fit KCQ recta linea, & angulus ille abit non in nihilum, ſed in duos rectos KCQ, quorum menſura eſt dimidia circumferentia KOQ. Pergente M in M', jam angulus KCM' in vulgari geometrico ſermone intelligitur is, qui hiatu cavo reſpicit plagam KN, qui iterum eſt mi-

minor duobus rectis. At is non ſuccedit priori illi KCM, nec eſt analogus ipſi primario analogiæ genere, ſed ſecundario. Priori ſuccedit angulus, ut eum appellavimus, convexus, quem KC cum CM′ continet ex parte OQ, & cujus menſura eſt arcus KOM′ ſemicirculo major. Is creſcit, & ille cavus decreſcit, dum M′ pergit in L, & appellente demum M′, vel L ad K, complentur quatuor recti. Nimirum ut in fig.89 bini ſunt arcus FB*m*, FA*m* contraria directione complentes circulum, immo infiniti, qui integros addunt circulos directione utraque; ita bini conſiderari poſſunt anguli, quos binæ rectæ in puncto quovis continent directione contrarii, alter convexus, alter cavus, complentes quatuor rectos, immo infiniti directione utraque. F.89

801. Porro ubi angulus directionem mutat tranſeundo per nihilum, tractari debet ut negativus. In fig. 240 angulus ACB externus F.240 æquatur ſummæ angulorum AEB, DBE, qui ſunt interni, & oppoſiti in triangulo CBE. Hinc angulus AC2B æquari debet differentiæ angulorum AE2B, DBE2 ob directionem DBE mutatam in DBE2, tranſitu facto in D per nihilum. Et revera eſt ipſi differentiæ æqualis, cum AE2B externus æquetur binis DBE2, AC2B internis, & oppoſitis.

802. Quod ſi mutatio fiat tranſeundo per duos rectos; angulo, qui in vulgari ſermone naſcitur cavus ad partem oppoſitam, debet ſubſtitui convexus ille, qui eſt ejus complementum ad quatuor rectos. Eſt notiſſimum Geometriæ theo-

rema, in circulo angulum ad centrum eſſe duplum anguli eidem arcui inſiſtentis ad circumferentiam. Non erit verum, niſi angulus ad circumferentiam ſit acutus, vel niſi anguli hujuſmodi convexi conſiderentur. In fig. 271 angulus APC
F.271 eſt duplus anguli AI'C; anguli autem AIC non habetur duplus in vulgari ſermone acceptus, neque enim eſt APC, ſed ejus complementum ad rectos quatuor, cujus menſura eſt arcus AI'C, ſive eſt angulus APC convexus.

803. Hujus etiam canonis uſus occurrit in
F.57 Sectionum Conicarum elementis. Ex num. 184
58 habetur, in Ellipſi in fig. 58 duplum anguli PH*p*
59 binarum tangentium æquari differentiæ binorum angulorum PF*p*, P*fp*, in Hyperbola in fig. 59 ſummæ eorundem PF*p*, P*fp*. Nam ubi *f* abit in Parabola in infinitum ita, ut nuſquam jam ſit, angulus P*fp* decreſcens in receſſu puncti *f* in infinitum jam fit nullus, & iccirco ibidem in fig. 57 in Parabola duplum anguli PH*p* æquatur ſoli angulo PF*p*. Ubi autem abit curva in Hyperbolam figuræ 59, & *f* redit ex parte oppoſita, angulus P*fp* acquirit directionem oppoſitam, quam cum acquiſierit in tranſitu per nihilum, evaſit negativus, & differentia debuit abire in ſummam.

804. Ibidem autem ſi angulus PF*p* non ob-
F.60 vertat cuſpidem puncto H, ſed ut in fig. 60,
61 61, 62 hiatum; enunciatio theorematis in vul-
62 gari Geometrico ſermone falſa erit. Nam non eſt accipiendus angulus PF*p* cavus ille, quem vulgo conſiderant, ſed ejus complementum ad 4 rectos, nimirum ille, quem nos convexum appel-

pellavimus, qui conſtat adhuc binis PFN, pFN, quod ibidem enunciavimus, & qui id non enunciant, theorema exhibent in hoc caſu falſum. Nam in Geometrico ſermone vulgari ſemper anguli nomine intelligitur cavus ille, non convexus.

805. Hìc ſolum poſtremo loco notandum eſt hoſce binos modos mutandi directionem in angulis, tranſeundo per nihilum, & per duos rectos, reſpondere binis modis, quibus linea abit e poſitiva in negativam tranſeundo per nihilum, & per infinitum. Ut autem ibi non eſt analoga primario analogiæ genere priori lineæ linea finita habens directionem oppoſitam nata in tranſitu per infinitum, ſed illa per infinitum traducta pluſquam infinita; ita hìc priori angulo non reſpondet poſt tranſitum per duos rectos angulus cavus directionis contrariæ, ſed ille, quem nos hìc convexum diximus pluſquam obtuſus.

806. Canon.6. *Quadratum lineæ tam poſitivæ, quam negativæ eſt poſitivum, & quodvis quadratum poſitivum bina habet latera alterum poſitivum alterum negativum. Si autem quoddam quadratum æquale fuerit rectangulo, cujus latus alterum directionem mutet; ipſum quidem quadratum cenſendum erit reale, ſed negativum, & quadrato primi analogum ſecundo genere analogiæ; at ejus latus fiet imaginarium, & impoſſibile, deficiente ibi termino analogo lateri quadrati prioris: ſi directionem mutet utrumque rectanguli latus, erit reale utrumque latus quadrati poſitivum, & negativum, & ſingula ex his erunt analoga primo analogiæ genere ſingulis lateribus prioris quadrati.*

807. Patet hic Canon. ex iis, quæ diximus a num.682 ad 688, ubi & ejus demonſtratio habetur, & afferuntur exempla ordinatarum BG, BG
F.242 figuræ 242, quæ binæ ſunt intra circulum, nullæ extra, ac B2L, B3L2, quæ habentur extra utrinque in Hyperbola, non autem intra, ac alia exempla adduntur deſumpta a propoſitionibus Euclidis libri 2. Quadratum autem, ubi fit negativum, & adhuc appellatur quadratum, non erit quadratum quantitatis realis, ſed productum ex recta poſitivè conſiderata, & recta longitudinis ejuſdem, directionis contrariæ negativè conſiderata; adeo ut quadratum negativum ubi ad reales quantitates referatur, idem ſignificet, ac ejuſmodi productum, quod quadrato poſitivo, & vere quadrato reſpondet ita, ut recta negativa poſitivæ; erit autem quadratum lateris imaginarii, ſive impoſſibilis. Rectangula ejuſmodi, & quadrata negativa cum poſitivis confundi, & pro ſe invicem aſſumi poterunt, ubi ſolæ magnitudines conſiderantur; at ubi etiam poſitio conſideratur, ac analogia ad transformationes, diligenter ſunt diſtinguenda.

808. Conſequitur autem ex ipſo canone hoc veluti Corollarium. *Inter binas rectas tam ſimul poſitivas, quam ſimul negativas media proportionalis eſt duplex, altera poſitiva, altera negativa, quæ longitudine ſunt æquales, directione contrariæ. Inter binas alteram poſitivam, negativam alteram media proportionalis realis non habetur, ſed in impoſſibilem, & imaginariam utraque tranſit: haberi autem poſſunt binæ mediæ longitudine æquales, ſed poſitione contrariæ altera po-*

poſitiva, altera negativa. Patet corollarium ex eo, quod quadratum mediæ æquari debeat rectangulo ſub extremis, & demonſtratum eſt num. 685. Binæ autem illæ mediæ habebuntur, ubi datarum altera eſt poſitiva, altera negativa, ſi earundem datarum utraque poſitive conſideretur, & inveniantur binæ mediæ, quod ibidem præſtitimus, inventis binis B2L, mediis inter AB2, B2D: Nam ſi hæ conſiderentur ut poſitivæ ambæ, erit AB2 ad utramvis B2L, ut eadem B2L ad B2D, at ſi altera ex iis conſideretur negativo modo, ut AB2, erit AB2 ad alteram e binis BL, ut altera BL, non illa eadem, ad B2D, mutata nimirum conſideratione utriuſque termini ejuſdem primæ rationis. Atque hoc erit diſcrimen inter B comparatum circulo, & B2 comparatum Hyperbolæ. Erit ibi AB ad alterutram BG, ut eadem BG ad BD, hic AB2 ad alteram B2L, ut non ea, ſed altera BL pariter ad Hyperbolam terminata ad B2D. Atque hoc pacto relationes quandoque habebuntur non inelegantes inter Ellipſim, & Hyperbolam, ſolventes quædam problemata, quæ viderentur ope poſitivorum, & negativorum ad unicum problema reduci poſſe, & communem habere enunciationem, ubi nimirum planis poſitivis negativa ſuccedant, non lineæ lineis tantummodo, ut in fine eorum, quæ ad hunc Canonem pertinent, patebit.

809. Hujus Canonis, & Corollarii ſummus eſt uſus in Sectionum Conicarum elementis, & ejus ope mirum in modum ratio redditur quarundam, quæ videntur anomaliæ evertentes omnem ana-

logiam, & relationem harum curvarum ad ſe invicem. Illud jam ſupra notavimus num.761, ubi oſtendimus axem Hyperbolæ per infinitum traductum, non vero axem finitum reſpondere finito axi Ellipſeos, quod nimirum per quodvis punctum axis finiti Ellipſeos, & per nullum finiti, ſed per quodvis illius, qui traducitur per infinitum in Hyperbola, ductæ rectæ ipſi axi perpendiculares occurrunt perimetro. Id vero hinc ſane manifeſto pendet, & ad omnes diametros primarias Hyperbolæ traducitur. Nimirum in fig.9. in Ellipſi eſt
F.9 (num.66) conſtanter axis Mm ad chordam VFu, ut rectangulum MRm ad quadratum ſemiordinatæ RP. Jam vero ubicumque aſſumatur punctum R in Ellipſi in axe finito Mm, ambæ MR, mR retinent poſitionem ſuam, adeoque habentur ordinatæ PRp iis reſpondentes. At ſi punctum aſſumatur extra ad partes M, vel m, mutatur in negativam MR, vel mR, manente mR, vel MR. Quare mutatur in negativum etiam rectangulum MRm. Hinc quartus terminus proportionalis poſt Mm, Vu, & rectangulum MRm, quod erat quadratum ſemiordinatæ, vertitur in negativum, & proinde ſemiordinata reſpondens puncto cuilibet axis Ellipſeos $M \infty m$ per infinitum traducti eſt imaginaria, licet ejus quadratum reale maneat, ſed negativum.

F.9 810. Comparata jam Hyperbola figuræ 11
11 cum Ellipſi fig.9, ſi R aſſumatur in quovis puncto axis indefiniti MH; directionem habet MR eandem, ac prius, mR contrariam; & ſi aſſumatur R' in axe mb, eam mutat MR', retinet mR'.

Qua-

Quare in utroque caſu, rectangulum MRm evadit negativum. Remanet autem Vu poſitiva quantitas, Mm negativa, directionis nimirum contrariæ. Quare mutatis primo, ac tertio termino proportionis, & manente ſecundo, debet manere quartus, adeoque quadratum ſemiordinatæ habetur poſitivum, & ſemiordinata utraque realis per totum axem M ∞ m traductum per infinitum. Contra vero in quovis puncto R aſſumpto inter M, & m retinetur directio utriuſque MR, mR reſpectu Ellipſeos; adeoque retinetur rectangulum MRm directionis ejuſdem, retinetur VFu, mutatur vero Mm. Quare mutatur etiam quadratum ſemiordinatæ in negativum, & proinde nullum eſt punctum aſſumptum in axe Mm finito Hyperbolæ, in quo haberi poſſint ordinatæ. Ordinatæ ipſæ iis punctis reſpondentes ſunt impoſſibiles, & imaginariæ; earum autem quadratum, quartum in illa proportione, in qua priores tres termini reales ſunt, reale eſt etiam ipſum, ſed negativum.

811. Hoc animadverſo, patet jam primo, cur Ellipſis quidem finito orbe in ſe ipſam redeat, Hyperbola vero habeat bina crura in infinitum utrinque producta. Patet etiam unde oriatur diſcrimen inſigne inter diametros conjugatas primariarum Hyperbolæ, ſive diametros ſecundarias & diametros conjugatas Ellipſeos. Omnes diametri hujus terminantur ad perimetrum, (num. 212): illius diametri, non omnes, ſed eæ ſolæ, quas continent ii aſymptotorum anguli, quos axis tranſverſus ſecat, occurrunt perimetro ipſius; reliquæ autem ipſi nullo modo occurrunt, ſed ter-

minantur ad perimetrum binorum ramorum Hyperbolæ conjugatæ (num.212), quæ Hyperbola conjugata eſt locus geometricus a priore omnino diſtinctus. Nam quæcumque diximus de ordinatis axi tranſverſo, locum habent in ordinatis diametrorum omnium, cum in omnibus juxta num.351 debeat eſſe rectangulum ſub abſciſſis ad quadratum ſemiordinatæ in conſtanti ratione diametri primariæ, quæ in Hyperbola mutat directionem, ad rectam datam, quæ parameter dicitur, & ut paullo inferius hinc demonſtrabitur, eam non mutat. Quamobrem ſi per centrum C, utique interceptum verticibus diametri, concipiatur ordinata parallela ordinatis diametri primæ cujuſvis; ea quidem imaginaria eſt, ſed ejus quadratum eſt reale, & negativum. Si ea eſſet realis, eſſet utique analoga diametro conjugatæ Ellipſeos, quæ cum per centrum tranſeat, & ad perimetrum Ellipſeos ipſius terminetur, ac ſit parallela ordinatis ſuæ diametri primæ ſibi conjugatæ, etiam ipſa eſt ordinata quædam pertinens ad ipſum centrum. Hinc eruitur illud: ſemidiametro parallelæ ordinatis diametri Ellipſeos cujuſvis terminatæ ad ejus perimetrum, adeoque ejus conjugatæ nihil reſpondere analogum, quod reale ſit, & pertineat ad centrum finitum Hyperbolæ. Sed ejus quadrato reſpondere quadratum quoddam negativum, quartum poſt axem Mm itidem negativum, parametrum poſitivam, & rectangulum MCm poſitivum.

812. Porro ob hujus quadrati negativi analogiam cum quadrato poſitivo axis conjugati Ellipſeos

lipſeos factum eſt, ut Geometræ, licet id ipſum omnino tum non perſpexerint, ſemidiametros appellaverint conjugatas primariarum, latera ejuſmodi quadrati poſitivè conſiderati, quas cum viderent non terminari ad perimetrum, eas dixerunt ſemidiametros ſecundarias. Illæ funguntur vice earum, quæ imaginariæ ſunt, & quæ vere analogæ eſſent, ſi eſſent reales. Hinc autem illud manifeſto conſequitur, ſemidiametros, vel diametros ſecundarias Hyperbolæ nullam habere analogiam cum ſemidiametris, vel diametris conjugatis Ellipſeos, ſed illarum quadrata eſſe analoga ſecundario analogiæ genere quadratis harum, nimirum, ubi refertur Hyperbola ad Ellipſim, quadrata ſemidiametrorum ſecundariarum illius aſſumenda eſſe, ut negativa, dum quadrata ſemidiametrorum conjugatarum cujuſvis diametri Ellipſeos conſiderantur, ut poſitiva.

813. Huc ubi jam delati ſumus, prona fient, & legibus continuitatis, & uniformis Sectionum Conicarum naturæ admodum conformia plurima, quæ viderentur omnem analogiam pervertere. Nimirum in iis, quæ pertinent ad diametros ipſas ſecundarias Hyperbolæ collatas cum diametris Ellipſeos, diſcrepabunt omnia, ac proprietates earum diverſæ erunt, & diverſa ratione demonſtrabuntur. Ubi autem earum quadrata occurrent, ſervabitur penitus analogia, dummodo quadrata diametrorum ſecundariarum Hyperbolæ habeantur pro negativis. Patebit autem & illud diſcrimen, & hæc conformis ratio, conſideratis ipſis Conicarum Sectionum Elementis, in quibus, quæ ma-

maximè notatu digna huc pertinentia arbitrabimur, hìc perſequemur.

814. Conſtructio Ellipſeos, quam ex datis binis diametris dedimus num. 391, nullo modo ad Hyperbolam transferri poteſt: ea vero, quam pro Hyperbola dedimus num. 269 ad Ellipſim pertinere non poteſt: ambæ elegantiſſimæ ſunt, & ſimpliciſſimæ, ſed a ſe invicem remotiſſimæ, & penitus diſcrepantes. Axis tranſverſus in Ellipſi eſt omnium diametrorum maxima (num. 379), in Hyperbola omnium primariarum minima (num. 246), & methodi, quibus ea theoremata demonſtrantur, a ſe invicem diſcrepant. In Ellipſi omnes diametri terminantur ad ejuſdem Ellipſeos perimetrum, ut diximus: in Hyperbola terminantur omnes primariæ tantum, ſecundariæ autem ad Hyperbolam conjugatam, quæ alium locum geometricum conſtituit a priori prorſus diſtinctum. In quavis Ellipſi habentur (num. 379) binæ diametri conjugatæ æquales, ac vel primaria major eſſe poteſt, quam ſua conjugata, vel minor: in Hyperbola, niſi æquilatera ſit, ſemper inæquales ſunt, ac primaria (num. 246) vel ſemper major, vel ſemper minor, quam ſua conjugata.

815. Ipſa ratio, qua axem conjugatum, & diametros primariis conjugatas definivimus in Ellipſi, & Hyperbola diſcrimen hoc apertiſſime docet, cum admodum diverſa ſit, licet prima fronte conformis appareat. Neque enim eas definivimus ex ulla relatione communi ad perimetrum Ellipſeos, & Hyperbolæ, quæ nimirum nulla habebatur, ſed alia via ad hanc ipſam anomaliam de-

declarandam aptiſſima. Nimirum pro axe conjugato in fig.9, & 11 aſſumpſimus CX, Cx medias inter MF, mF, & diximus utrobique illam Xx axem conjugatum. Videtur ſane hæc definitio communis eſſe, deſumpta nimirum ab eadem relatione ad rectas analogas MF, mF. At re diligentius conſiderata, contrarium erit admodum manifeſtum. Cum enim MF in fig.11 habeat eandem directionem, ac in fig.9, & Fm contrariam, patet alteram tantummodo tranſire in negativam. Hinc ſi habetur in Ellipſi duplex media proportionalis inter MF & Fm, ea in Hyperbola haberi non poteſt juxta num.808, cum nulla ſit media inter quantitatem poſitivam, & negativam, ſed binæ inveniri poſſint mediæ æquales quidem magnitudine, ſed poſitione contrariæ altera poſitiva, altera negativa. Si igitur in Hyperbola aſſumuntur mediæ CX, Cx inter MF, mF, jam etiam mF conſideratur, ut poſitiva, adeoque ipſa ſic conſiderata non eſt analoga illi mF Ellipſeos ibidem conſideratæ, ut poſitivæ, nec proinde illæ mediæ analogæ ſunt.

816. At pro diametris conjugatis cujuſvis diametri poterat quidem illud aſſumi pro definitione, ut eſſent rectæ per centrum ductæ parallelæ ordinatis illius in eo bifariam ſectæ, quarum quadratum ad quadratum ſuæ diametri primæ eſſet, ut eſt quadratum ſemiordinatæ ad rectangulum ſub abſciſſis, quæ viſa fuiſſet communis definitio. Sed præter quam quod in eundem ſcopulum incidiſſet definitio, quadrato ſemidiametri ſecundariæ evadente negativo in Hyperbola, & ipſa ſemidiametro, ac diametro, ſi analogia rite ſervanda eſſet, ima-

imaginaria ; præterea ea definitio nec generalis extitiſſet : nam diameter quævis primaria habet in Hyperbola ſuam ſecundariam, cujus ea ipſa conjugata eſt, nec tamen habetur conſtans ea ratio quadrati ſemiordinatæ diametri ſecundariæ ad rectangulum ſub abſciſſis a binis ejus verticibus, ſed ea proprietas eſt ordinatarum tantummodo, & abſciſſarum ad diametrum primariam. Aliam igitur apparentem tantummodo analogiam conſectati ſumus, quæ primo aſpectu ſumma videretur, licet re ipſa, nulla eſſet, cum nimirum nulla prorſus haberi poſſet. Nimirum in ſubſidium vocavimus figuram illam conclusam quatuor infinitis binarum Hyperbolarum conjugatarum ramis,
F.52 quas exhibent figuræ 52, 83, 84, & ad unicam
83 Ellipſim, ut num. 172 innuimus, relationes habet
84 admodum elegantes. Diximus igitur num. 212 illam diametri cujuſvis diametrum conjugatam, & poſitione, & magnitudine definitam, quæ per centrum ducta ordinatis illius parallela eſſet, & ad perimetrum terminaretur in Ellipſi ipſius Ellipſeos, in Hyperbola figuræ ipſius a quatuor binarum Hyperbolarum conjugatarum ramis concluſæ, qua definitione ſatis patebat contineri axes ipſos, cum axem conjugatum terminari in Ellipſi ad perimetrum ipſius Ellipſeos conſtaret ex num. 72, & in Hyperbola id in ipſa Hyperbolarum conjugatarum notione contineretur num. 170.

817. Porro tanta eſt ejus figuræ quatuor Hyperbolarum ramis concluſæ habitudo ad unicam Ellipſim, ut ea vel minus perito, vel minus cauto Geometræ facile poſſit imponere, ac ſuadere

ejus

ejus etiam figuræ perimetrum ſimplicem eſſe Geometricum locum, & unicæ Ellipſi integræ reſpondentem. Nam quævis recta tam in quavis Ellipſi, quam in ejuſmodi figura per centrum ducta, ipſius perimetro occurrit hinc, & inde in binis punctis tantummodo, ſi nimirum & aſymptotorum concurſus conſiderentur, ut in infinito deliteſcentes, ubi ſe & cum ipſis aſymptotis octo illa quatuor ramorum crura conjungant: quævis ex iis ita terminata in ipſo centro ſecatur bifariam; quævis eſt diameter habens ordinatas, quas bifariam ſecet, qnibus liceret annumerare etiam illas IL in fig. 83, quæ dici poſſent ordinatæ aſymptotorum alteri parallelæ ab altera bifariam ſectæ, juxta num.240; quævis habet binas tangentes perimetri figuræ ordinatis parallelas præter aſymptotorum ordinatas illas LI, quæ nullam habent niſi ipſa aſymptoto conſiderata pro tangente, cujus contactus ita in infinitum recedit, ut nuſquam jam ſit: quævis diametrum ſibi conjugatam habet parallelam binis tangentibus figuræ per binos ſuos vertices ductis. Demum tam in Ellipſi, quam in ea figura quatuor tangentes per extrema puncta diametrorum conjugatarum ductæ parallelogrammum continent, cujus area conſtantis eſt magnitudinis, æqualis nimirum rectangulo ſub binis axibus, juxta num.469, ubi illud etiam ad hujuſmodi analogiam accedit, quod anguli ejus parallelogrammi terminantur in Ellipſi ad aliam Ellipſim ſimilem (num.375), & in Hyperbola ad aſymptotos (num.244), quas patet communes eſſe debere omnibus Hyperbolis ſimilibus idem ha-

habentibus centrum C, & eandem directionem axium M*m*, X*x*, ac eandem eorundem rationem ad ſe invicem, & in eas debere deſinere omnes Hyperbolas, ubi axes evaneſcant, ut adeo illæ ipſæ aſymptoti conſiderari poſſint, tanquam alia quædam Hyperbola illi ſimilis, in cujus perimetro id parallelogrammum angulos habet terminatos, ut in Ellipſi.

818. At licet tanta ſit hujus figuræ ſimilitudo cum Ellipſi, diſcrimen admodum facile deprehenditur vel ex eo, quod eadem recta ei figuræ in quatuor etiam punctis poſſit occurrere, ut illa H*b* fig. 84, quæ occurrit ipſi in N, P, *p*, *n*, præter quam quod nulla e mille aliis proprietatibus, quæ vel ad focos, vel ad ordinatas. vel ad latera recta, normales, tangentes, ac alia ejuſmodi pertinent in Ellipſi, locum habet in ramis omnibus ejus figuræ, ſed rite applicata in binis tantummodo. Illa vero qualiſcumque apparens analogia, & figurarum ſimilitudo inde ortum duxit, quod licet ipſæ diametri ſecundariæ non ſint in Hyperbola analogæ diametris Ellipſeos, earum tamen quadrata ſunt analoga ſecundo analogiæ genere quadratis harum, quibus ſi negativè ſumantur, prorſus reſpondent. Cum ipſæ diametri vi ejus definitionis nullo modo analogæ ſint, hæc ipſa analogia quadratorum demonſtrari communi demonſtratione non potuit deſumpta ex ipſa definitione. Pendet ea a theoremate enunciato Prop. 7 num. 351, in qua habetur pro utraque curva, quadratum ſemiordinatæ cujuſvis diametri primariæ eſſe ad rectangulum ſub binis ab-

ſciſſis

ſciſſis a binis ejus verticibus, ut eſt quadratum ſemidiametri conjugatæ ad quadratum ſemidiametri primariæ. Porro rationem ejus quadrati ad rectangulum ſub abſciſſis conſtantem eſſe communi demonſtratione patuit num.352; at eam eandem eſſe, quæ eſt quadrati ſemidiametri primariæ, eadem pro utraque curva demonſtratione evinci non potuit; ſed pro Ellipſi ibidem demonſtratum eſt ex eo, quod vertices diametri conjugatæ ſint etiam ii ad eandem Ellipſim, pro Hyperbola repetitum eſt a num 256, ubi idem longe alia demonſtratione, petita videlicet ab aſymptotorum natura, fuerat demonſtratum.

819. Cæterum demonſtrata jam ejuſmodi quadratorum analogia, ex qua conſtat quadratum ejus, quæ dicta eſt diameter ſecundaria in Hyperbola, eſſe ejuſdem magnitudinis, ac eſt quadratum negativum vere analogum quadrato poſitivo diametri conjugatæ Ellipſeos, quæcumque in Ellipſi pertinebunt non ad ipſas diametros conjugatas, ſed ad earum quadrata, erunt communia Hyperbolæ, dummodo in hac quadratum ſemidiametri ſecundariæ ſumatur negativè, quod ſane, ſi ipſa ſecundaria diameter eſſet analoga diametro Ellipſeos, poſitive ſumi deberet, cum nimirum & poſitivarum, & negativarum quantitatum quadrata ſint poſitiva. Fit autem inde, ut ubi de quadratis agitur, altero jam negativè accepto, ſummis jam reſpondeant differentiæ, quod in ſequentibus exemplis manifeſtum erit.

820. In Ellipſi in fig.19 quadratum diſtantiæ CF foci a centro æquatur (num.64) differentiæ qua- F.19 20

quadratorum ſemiaxium CM, CX; at in Hyperbola in fig.20 ſummæ. Semiaxis quidem Hyperbolæ transverſus ille finitus M*m* eſt analogus ſemiaxi tranſverſo Ellipſeos, ſed ſecundario analogiæ genere, adeoque reſpectu ipſius negativus. At poſitivum adhuc manet ejus quadratum. Semiaxis conjugatus illius terminatus vertice X non eſt analogus ullo analogiæ genere ſemiaxi conjugato hujus, ſed illi reſpondet imaginaria, atque impoſſibilis quantitas, cujus tamen quantitatis quadratum reale æquatur ſemiaxis conjugati quadrato negativè ſumpto; unde fit, ut ubi ipſius CX adhibetur quadratum in Ellipſi, ſubſtitui poſſit in Hyperbola ſuæ CX quadratum negativè ſumptum, quod erit idem, ac rectangulo MF*m* Ellipſeos analogum, ſed negativum Hyperbolæ rectangulum MF*m* ſubſtituere. Ac ut quadratum CF in fig. 19 eſt differentia quadrati CM, & rectanguli MF*m*, in figura vero 20 ſumma eorundem, mutata nimirum directione rectanguli MF*m* ob *m*F mutatam poſitione, quæ duo theoremata apud Euclidem reſpondent propoſitioni 5 & 6 Libri 2, ſed revera rite conſiderata Geometriæ indole, unicum theorema ſunt; ita etiam ibi differentiæ, hic ſummæ quadratorum CM, CX æquatur illud idem quadratum CF.

821. Eodem prorſus pacto cum in Ellipſi ſumma quadratorum ſemidiametrorum conjugatarum, æquetur ſummæ quadratorum axium, in Hyperbola æquantur inter ſe eorundem qnadratorum differentiæ; quod nimirum quadrato diametri conjugatæ Ellipſeos reſpondet in Hyperbola quadratum

cum quantitatis imaginariæ, ſed ipſum reale, & æquale quadrato ſemidiametri conjugatæ Ellipſeos negativè ſumpto.

822. Quod parametri, ſeu latera recta omnium diametrorum in Ellipſi, & primariorum in Hyperbola ſint prorſus analoga, & quidem primario analogiæ genere, ſunt autem, ut jam videbimus, ac proinde proprietates omnes communes habeant, & communi enunciatione, conſtructione, demonſtratione ubique gaudeant, ex hac ipſa quadrati ſemidiametri conjugatæ negativè ſumpti conſideratione omnino profluit. *Latus rectum* cujuſpiam diametri diximus generaliter (num. 351) tertiam continue proportionalem poſt diametrum illam, & ejus conjugatam, & eo reduci etiam latus principale, conſtat ex num.66, cum inde pateat, & in Ellipſi, & in Hyperbola ipſum eſſe tertium poſt axem tranſverſum, & conjugatum; licet ubi ipſum definivimus num.54, uſi fuerimus ea proprietate, quam habet communem cum latere recto principali Parabolæ carentis axe conjugato, quod nimirum ſit chorda axi perpendicularis per focum ducta. Rectangulum ſub diametro primaria, & latere recto debet æquari quadrato diametri ſecundariæ. Porro ubi Ellipſis in Hyperbolam abit, quadratum diametri conjugatæ ſecundariæ Hyperbolæ ipſius negativè ſumptum eſt analogum quadrato diametri conjugatæ Ellipſeos. Debet igitur evadere negativum illud rectangulum, adeoque debet evadere negativum alterum tantummodo e binis ejus lateribus. Evadit autem negativa diameter primaria, quæ nimirum termi-

 natur

natur ad ramum oppoſitum. Igitur latus rectum debet adhuc remanere poſitivum, quod cum connectatur non cum ea quantitate imaginaria, quæ in Hyperbola reſpondet diametro conjugatæ Ellipſeos, ſed cum ejus quadrato reali, reale eſt.

823. Poterat quidem ſic etiam definiri, ut eſſet quartum poſt rectangulum ſub binis abſciſſis, quadratum ſemiordinatæ, ac diametrum primariam, cujus ea eſt ordinata, & in hac definitione, quæ eodem redit, nihil aſſumeretur, quod non eſſet homogeneum, & reale. Abeunt autem in negativos primus terminus ob alteram abſciſſam, ac tertius ob diametrum primariam abeuntes in negativas; ac proinde manente poſitivo ſecundo termino, ſive quadrato ſemiordinatæ, manet etiam poſitivus quartus, ſeu latus rectum. Eo pacto ejus poſitiva analogia in ipſa definitione manifeſta eſſet per ſeſe. At quoniam ejus relationis ad ipſas diametros major eſt uſus, & eſt multo ſimplicior determinatio tertiæ continuè proportionalis poſt binas rectas, quam quartæ poſt illa plana; idcirco hic etiam ſimpliciatati poſthabuimus analogiam, ut ſupra num.797.

824. Cæterum latera recta communibus gaudere proprietatibus in utraque curva, plurimis exemplis patet, quæ elementa ipſa perpendentibus paſſim occurrent. Eodem pacto latera recta principalia determinantur num. 54 per chordam
F.173 axi perpendicularem per focum ductam: eodem
180 pacto num.464 definitur in fig. 173, 174 ex di-
186 midio latere recto principali VO ſubnormalis RM
189 æqualis RD: eodem pacto num.475 in fig. 180,
ac

ac 181 illa PΓ, abſciſſa per perpendiculum MT ductum ex concurſu normalis cum axe tranſverſo in radium foci, æqualis dimidio lateri recto principali: eodem pacto num.495 determinatur in fig.186, 188 ex quovis latere recto VA quadratum ſemiordinatæ PR æquale rectangulo VRL: eodem pacto num.503 in fig.189, 191 chorda VH, quam circulus oſculator abſcindit ex diametro primaria ducta per punctum oſculi, æqualis lateri recto ejuſdem diametri. In iis omnibus & enunciatio, & conſtructio, & demonſtratio communis eſt.

825. Quoniam vero ipſæ diametri conjugatæ in Ellipſi, & Hyperbola nullam analogiam habent, habent autem earum quadrata ſecundariam; tam in demonſtrandis theorematis, quam in ſolvendis problematis, quæ pendent a diametris ipſis conjugatis, proderit ſæpe ad earum quadrata recurrere, quorum ope communis quandoque inveniri poterit & enunciatio, & conſtructio, ac demonſtratio. Exemplum theorematis deſumi poteſt ab illa area parallelogrammi, quod in ſuo angulo continent binæ diametri conjugatæ, & circumſcribitur Ellipſi, ac inſcribitur figuræ Hyperbolicæ 4 ramorum, quæ area conſtanter æquatur rectangulo ſub ſemiaxibus. Nos aliam ejus demonſtrationem dedimus pro Ellipſi num.375, aliam pro Hyperbola num.244, quarum illa prior ad Hyperbolam, poſterior ad Ellipſim transferri nullo modo poſſunt, atque id idcirco, quod in iis nulla haberi debuerat analogia. Demonſtrationem communem nonnulli exhibent ope tangentium,

 quæ

quæ proprietates communes habent. Nos etiam num.469 commenem ejus demonſtrationem haberi poſſe oſtendimus petitam ex alio communi theoremate propoſito num.466, quod nimirum in figura 171, & 172 rectangulum ſub perpendiculo
F.171 CL e centro in tangentem, & ſemidiametro con-
172 jugata CI æquetur rectangulo ſub ſemiaxibus. Id vero idcirco fieri potuit, quia num.467 in ejus theorematis demonſtratione inventum fuit, alternando, quadratum CL ad quadratum ſemiaxis tranſverſi CV, ut quadratum ſemiaxis conjugati CD ad quadratum ſemidiametri conjugatæ CI. Quadrata adhibita ſunt, quæ ſunt realia, licet negativa ſint. Quadratum autem ſemiaxis conjugati CD, & ſemidiametri conjugatæ CI in Hyperbola, ſi negativè accipiantur, ſunt analoga iiſdem quadratis poſitivè ſumptis in Ellipſi, & ratio inter ea negativè ſumpta eſt eadem, ac inter ea poſitivè ſumpta, quam ob cauſam in lateribus ipſorum poſitivè conſideratorum, quæ realia ſunt, manſit ratio, licet in iis non habeatur analogia. Id ſemper accidet, ubi proportio aliqua complectetur in Ellipſi binos terminos, qui in Hyperbola maneant analogi, & binas diametros, quæ in Hyperbola fiant ſecundariæ; manebit proportio, ſed in demonſtratione recurrendum erit ad quadrata, & ad hunc ipſum diſcurſum, quem hìc inſtituimus.

826. Problematis exemplum eſſe poteſt illud, quod num.436 propoſuimus, ubi & quadratum ſemidiametri conjugatæ analogum ſecundario analogiæ genere, & latus rectum primario analogiæ ge-

genere analogum adhibuimus. Ibi datis in fig. 160, 161 binis diametris conjugatis P*p*, I*i*, quærebantur axes. Poterant quæri binæ rectæ ejuſmodi, ut quadratorum ſumma, vel differentia æquaretur ſummæ, vel differentiæ quadratorum datarum CP, CI, & rectangulum rectangulo ſub altera, ut CI, & perpendiculo ex alterius vertice demiſſo in ipſam, quibus definitur conſtans parallelogrammum; at ſolutio nec obveniſſet communis, nec ita expedita. Suſtulimus heterogeneas illas diametros conjugatas, & illis ſuſtituimus parametros, quæ datis diametris primariis, & conjugatis dantur, & cum dentur per quadrata diametrorum conjugatarum, analogæ ſunt in utraque curva, & quidem primario analogiæ genere, ut vidimus num. 822. Eas combinavimus cum diametris primariis itidem analogis, ſed ſecundario genere, adeoque negativis. Idcirco applicata PS æquali dimidiæ parametro utrobique ex parte curvæ convexa, adeoque utrobique ad eandem plagam, nimirum in Ellipſi in fig. 160 in directum cum *p*P, in Hyperbola in fig. 161 a P verſus punctum *p* mutatum, unde provenit CS ſumma ibi ſemidiametri CP, & dimidiæ parametri PS, quæ in illa poſitivæ ſunt ambæ, differentia hic alterius poſitivæ ab altera negativa; communis profluxit & conſtructio, & demonſtratio. F. 160 161

827. Quoniam autem diximus num. 808 inter binas rectas alteram poſitivam, alteram negativam non poſſe inveniri unicam mediam proportionalem, poſſe autem duas magnitudine quidem æquales ſed directione contrarias; non erit

 abs

abs re proferre exemplum, in quo binæ ſemidiametri ſecundariæ in Hyperbola aſſumptæ cum directionibus contrariis ſint mediæ proportionales inter binas rectas, quæ in Ellipſi ambæ ſunt poſitivæ, & habent ſemidiametrum conjugatam pro media proportionali, quarum tamen altera directionem ſervat in Hyperbola, altera mutat, ubi ea proprietas ſemidiametri Ellipſeos ad Hyperbolam transfertur hujus contrariæ directionis be-
F.154 neficio, quæ nimirum profluit ex illa quadrati
155 negativi analogia. Diximus num.415 in fig. 156
156 ſemidiametrum ſecundariam CV in Hyperbola eſſe mediam proportionalem inter abſciſſam a centro CR, & diſtantiam CQ concurſus tangentis PQ cum eadem diametro. Monuimus autem ipſas CR, CQ, quæ in figura 153, & 154, ubi num.419 agebatur de diametris Ellipſeos, vel de diametris Hyperbolæ primariis, jacebant ad eandem centri partem, debere in fig.153 jacere ad partes oppoſitas. Nimirum in diametris primariis in fig. 153, & 154 erat CR ad CV, ut CV ad CQ, & quadratum CV æquale rectangulo ſub CR, & CQ. In fig.156 quadratum CV negativè ſumptum reſpondet quadrato CV fig.153, & 154. Hinc rectangulum ſub CR, & CQ debuit eſſe negativum in fig.156 reſpectu fig.153, & 154, adeoque cum in illis eandem utraque directionem habuerit, in hac debent habere contrarias; nec erit, ſi poſitio etiam ſpectetur, CR ad CV, ut CV ad CQ, ſed CR ad CV, ut C*u* ad CQ. Id autem ipſum eruitur ex fine demonſtrationis poſitæ num. 416. Invenitur enim CR ad CQ, ut qua-

quadratum CR ad quadratnm CV. Primus terminus, & ſecundus habent directionem contrariam, adeoque & tertius, ac quartus debent habere contrariam ita, ut quadratum CV reſpectu poſitivi quadrati CR pro negativo habendum ſit, ſive pro producto ex C*u*, & CV, quæ ſint veræ mediæ inter CR, CQ, ſi directio ſpectatur. Sed cum ipſa directio ibi conſideranda nobis non eſſet, & ſolæ magnitudines ſpectarentur, quæ in Geometria communi uſum habent; diximus ſemidiametrum ipſam CV' mediam inter CR, CQ ibi, ut in diametris primariis.

828, Haud multum abſimile ab eo caſu eſt illud, quod diximus num. 808 in fig. 242 ſi ſumatur F.242 BG pro media inter AB, BD conſideratas ut poſitivas, mutata AB in negativam AB2, fore non B2L terminatam ad Hyperbolam mediam inter AB2, B2D, ſed binas illas B2L habentes directiones oppoſitas, alteram poſitivam, alteram negativam, fore medias. Simile quid habetur etiam, ſi major quædam relatio quæratur inter inventionem Locorum Geometricorum, ad quæ terminatur vertex trianguli habentis baſim datam, cujus angulorum ad baſim ſumma, vel differentia æquatur angulo dato, quorum Locorum num.266 invenimus primum eſſe circulum, ſecundum eſſe Hyperbolam æquilateram. Sit in fig. 272. recta data V*u*, fiat F.272 angulus *u*VI æqualis ſummæ, vel differentiæ: tum methodo ibidem expoſita fiat circulus *p*'VP*u*, cujus V*u* chorda, IV*i* tangens, & Hyperbola æquilatera S V T ∞ *t u s*, cujus diameter V*u*, tangens pariter IV*i*: ac arcus circuli VP'*u*, & Hyperbolæ

VT ∞ *tu* egreſſi ab V ad partes I, ac deſinentes in *u*, exhibebunt ille ſummam, hic differentiam æqualem angulo *u*VI, reliquis idem exhibentibus reſpectu *u*V*i*.

829. Demonſtratio pro Hyperbola ibi expreſſa eſt hujuſmodi. Ducta ordinata PR*p* parallela IV*i*, & rectis VP, *u*P, erit (num.260) quadratum RP æquale rectangulo VR*u*, adeoque VR ad RP, ut RP ad R*u*; & proinde ſimilia erunt triangula VRP, PR*u* ob angulum ad R communem, & angulus R*u*P, ſive V*u*P æqualis VPR, ſive alterno PVI, adeoque differentia ipſorum PV*u*, P*u*V eadem, ac PV*u*, PVI, ſive datus angulus *u*VI, quæ demonſtratio eadem eſſet in crure *ut*∞, cum tangens per *u* debeat eſſe parallela tangenti IV*i*, & continere cum *u*V angulum æqualem ipſi *u*VI ad partes oppoſitas, nimirum alternum. Porro in circulo ductis pariter VP', *u*P', angulus P'VI chordæ cum tangente æquatur angulo V*u*P' in alterno ſegmento; adeoque bini P'*u*V, PV*u* æquantur ſoli *u*VI, ut oportebat. At ſi illa demonſtratio Hyperbolæ ad circulum ſit transferenda, ubi VR' acquiſivit directionem contrariam VR, & in negativam abiit, non erit jam R'P' media inter VR', R'*u*, ſed binæ R'P', R'*p*', quarum altera directionem habet alteri oppoſitam, erunt mediæ. Et quidem ſunt ex natura circuli, in quo rectangula VR'*u*' P'R'*p*' æqualia ſunt, adeoque VR' ad R'P', ut R'*p*' ad R'*u*, & ob angulos ad verticem R' oppoſitos æquales, angulus R'P'V ſive P'VI æqualis angulo R'*up*', ſive ob arcus VP', V*p*' interceptos a chorda tangenti parallela æquales, æqualis angulo V*u*P', ut oportebat.

830 Por-

830. Porrò hinc aliquando fieri poteſt, ut ad quorundam problematum reſolutionem, quæ videntur unicum continere problema, reſpondeant Loca Geometrica diverſæ prorſus naturæ, quæ diverſis eorum partibus ſatisfaciant, ſingula ſingulis. Satis quidem eſt manifeſtum id debere contingere, ubi poſitivorum, & negativorum ratio non habeatur. Ubi in problemate propoſito num. 676 quæritur in fig. 239 ſumma ſegmentorum MN, F.239
NO, quæ recta data EF inpercipit inter ſe, & binas parallelas AB, DG datas e recta ducta per punctum P datum, ſi ea recta debeat occurrere rectæ EF in N1 inter parallelas ipſas, ſolutio eſt admodum expedita, quam ibidem dedimus, ope ſolius recte KI, & PN ipſi parallelæ. Eadem communis erit etiam, ubi punctum N cadat extra in N2, vel N3, dummodo mutata directione recta intercepta habeatur pro negativa. Nam ſi nulla negativorum ratio habeatur, & quæratur recta ejuſmodi, in qua M2N2, & O2N2 ſimul ſumptæ æquentur rectæ datæ, problema erit altiſſimum, & curvas ſublimiores requiret. Si enim ex puncto P2 ducta quavis P2O2N2, ſumatur N2R ſemper æqualis, & contraria O2N2, haud difficulter demonſtratur, punctum R fore ad Hyperbolam tranſeuntem per P2, & habentem pro aſymptotis binas rectas parallelas ipſis EF, DG, quarum prima citra EF, ſecunda ultra P jaceat tantundem, quantum P jacet ultra EF, vel DG. Quod ſi ducta per P2 quavis recta P2M2, in ea ſumatur ſemper M2R recta æqualis datæ ſummæ; punctum R erit ſemper ad Concoidem axe AB, polo P2 deſcriptam, cum

cum ea ipſa ſit ejus curvæ notio, de qua nobis alibi agendum erit. Quare ubi eæ binæ curvæ ſe ſecuerint in R, habebitur ex prima N2R æqualis N2O2, adeoque M2R ſumma ipſarum M2N2, N2 O2, quæ ex ſecunda erit æqualis datæ.

831. At ibi ſtatim dignoſcitur mutatio problematis ex ſumma conſiderata etiam poſt mutatum alterum terminum in negativum. Verum prima fronte facilius quiſpiam habebit pro ſimplici pro-
F.242 blema, quo in fig. 242, datis in recta indefinita AD binis punctis A, D, quæratur in eadem punctum B ita, ut rectangulum ſub binis ejus diſtantiis AB, DB a punctis A, & D æquetur dato rectangulo. Ad ejus generalem ſolutionem requiritur figura compoſita ex circulo, cujus diameter AD, & Hyperbola æquilatera, cujus AD axis tranſverſus. Si ex quovis puncto R datæ rectæ erigatur perpendicularis RS media inter latera dati rectanguli, & ducatur ex S recta ipſi datæ rectæ parallela, quæ neceſſario occurret binis ramis Hyperbolæ in binis punctis L, L2, & circulum vel ſecabit in binis G, G, vel tanget in unico, vel evitabit, extra ipſum delata, prout RS fuerit minor, æqualis, vel major circuli radio, ſive dimidiæ AD, & occurſus illi cum figura coaleſcente ex iis binis locis ſolvent problema. Demiſſis enim perpendiculis LB, GB, quæ erunt æqualia ipſi SR, erit (num. 685) rectangulum quodvis ABC, æquale quadrato ſuæ BG, ſive BL, adeoque quadrato SR, & rectangulo dato. Idem autem problema proponi poſſet etiam hoc pacto. Invenire duas reciprocas binis datis, quarum detur

tur ſumma, vel differentia. Nam data AD eſt ſumma AB, BD, & differentia AB2, B2D, vel AB3, B3D, & alterum dati rectanguli latus eſt ad alteram ex ipſis, ut earum altera ad ejuſdem rectanguli latus alterum. Videtur problema unicum eſſe utrumque, cum ſummas in differentias mutet, mutata directione AB in AB2. Sed idcirco maxime dividitur in bina inter ſe diverſa, cum AB2, & B2D, non poſſint eſſe mediæ inter illas ipſas, inter quas mediæ ſunt AB, BD: nam in proportione unus tantum terminus directionem mutare non poteſt (num.777). Quadratum quoque eidem RS æquale, & ſemper poſitivum, æquale eſſe non poteſt utrique rectangulo ABD, AB2D, niſi ſuppoſitio poſitivorum, adeoque unitas problematis mutetur; cum alterum ex iis rectangulis reſpectu alterius, manente unica ſuppoſitione, negativum eſſe debeat.

832. Bina pariter Loca Geometrica figuræ 272 ſolvunt binos caſus problematis, qui ſimul ad unicum problema pertinere viderentur, & tamen ad duos pertinent inter ſe diverſos. Et quidem id problema erit quoddam complementum eorum, quæ in Conicarum Sectionum elementis demonſtravimus de figurarum ſimilitudine a num. 18. Sit in fig.273 figura *fab* directe, vel *fab'* inverſe ſimilis figuræ FAB, & quæratur, an habeant aliquod punctum P, vel P', in quo bina homologa puncta coeant, ſive quod ſit punctum homologum commune. Ad id inveniendum producta *af*, donec occurrat in V rectæ AF productæ indefinitè in I, ſumatur *fu* in eadem directione F.272

reſ-

reſpectu *fa*, in qua eſt FV reſpectu FA, quæ ad ipſam FV ſit in ratione, in qua ſunt latera homologa *af*, AF, & patet, puncta V*u* fore homologa. Jam ut punctum P, vel P' commune ſit, oportebit, rectæ VP, PV, vel *u*P', P'V ſint in illa eadem ratione, ac anguli IVP, V*u*P ad eaſdem plagas in ſimilitudine directa, IVP', V*u*P' in inverſa ad oppoſitas, æquales ſint inter ſe. Quare ſumma angulorum PV*u*, P*u*V, vel differentia P'V*u*, P'*u*V debebit eſſe æqualis angulo IV*u* dato, qui eſt ſumma angulorum PV*u*, PVI, & differentia P'V*u*, P'VI. Si igitur conſtruantur bini Loci Geometrici, alter, ad quem ex punctis V*u* ductæ rectæ *u*P, VP, vel *u*P', VP' ſint in illa ratione data *fa* ad FA, alter, in quo ſumma angulorum PV*u*, P*u*V, vel differentia P'V*u*, P*u*V æquetur dato angulo IV*u*, occurſus ejuſmodi locorum ſolvet problema. Porro patet ex num. 28 primum locum haberi, ſi in recta *u*V producta datis binis punctis V, *u*, alternis proportionis armonicæ, & ratione *fa* ad FA ipſius proportionis, inveniantur reliqua duo B, D per num. 25, & diametro BD deſcribatur circulus BPDP': ſecundum autem, patet ex num. 266, fore pro P arcum circuli VP*u* habentis VI pro tangente, V*u* pro chorda, & pro P' crura V T ∞ *t u* Hyperpolæ æquilateræ habentis V*u* pro diametro, & ipſam VI, pro tangente. Quare patet, quo pacto problema conſtruendum ſit.

833. Porro videbatur, pro directa, & inverſa ſimilitudine eadem Loca Geometrica requiri debere, at diverſa obtigerunt. Requirebatur enim

in

in altero ſumma, in altero differentia angulorum ad baſim æqualis datæ, quæ problemata cum in fig. 272 mutent illam eandem RP mediam inter VR, RV in binas R'P', R'p' medias inter VR', R'u, mutata poſitione VR in contrariam VR', Loci Geometrici requiſiti mutarunt naturam.

834. Ex tam expedita problematis conſtructione facile deduci poteſt, ſemper commune punctum inveniri debere in binis figuris, utcumque ſimilibus, idque unicum, ſi inæquales ſint, ac in caſu æqualitatis puncto D abeunte in infinitum, circulum PBP' abire in rectam, & P inveniri expeditius, P' abire in infinitum: in caſu autem inverſæ ſimilitudinis ſecto bifariam angulo VP'u per rectam indefinitam, eandem, quæ nimirum cum rectis P'V, P'u homologis æquales continebit angulos ad partes oppoſitas, fore communem poſitione homologam, in directa vero ſimilitudine, ſi non congruant directione ipſæ VP, uP poſitione homologæ, nullas alias per commune punctum ductas communes eſſe poſſe; ſi vero illæ congruant, omnes per ipſum ductas fore poſitione communes, ut ſunt omnes per F ductæ in fig. 33, & 34, cum nimirum novæ homologæ cum præcedentibus eoſdem in eandem plagam angulos continere debeant, adeoque inter ſe eundem angulum, quem illæ inter ſe. Sed nos jam longius evagatos ſeptimus Canon ad ſeſe vocat. F. 33 34

835 Canon. 7. *Si in quatuor proportionis cujuſpiam terminis bini utriuslibet rationis maneant finiti, reliquorum autem alter, abeat in nihilum, vel ita in infinitum, ut alterum ſaltem ejus ex-*

extremum nuſquam jam ſit; alter abibit pariter in nihilum, vel in infinitum eodem pacto. Quod ſi binis extremis manentibus alter ex extremis abeat in nihilum, vel in infinitum, alter contra abibit in infinitum, vel in nihilum, & idem in mediis continget, ſi bini extremi maneant: ac ſi, quod eodem redit, quoddam rectangulum finito rectangulo æquale maneat, ac alterum ejus latus abeat in nihilum, vel in infinitum, alterum contra abibit in infinitum, vel in nihilum.

836. Canonis hujus partes omnes videntur admodum manifeſtæ. Adhuc tamen ſic accuratius demonſtrantur. Si bini termini rationis utriuslibet finiti ſint, & unus præterea rationis alterius evaneſcat, vel fiat infinitus, alter ipſius non poteſt finitus remanere; nam is, qui ſupponitur evaſiſſe infinitus, vel abiiſſe in nihilum, adhuc eſſet finitus, & inveniretur ex reliquis tribus eodem pacto, quo in Geometria, datis tribus rectis, quarta proportionalis invenitur. Porro cum eorum ratio debeat eſſe finita, non poteſt alter ex iis binis terminis abire in nihilum, altero abeunte in infinitum, ratio enim infiniti ad nihilum non finita eſſet, ſed infinities infinita. Quod ſi binis extremis manentibus finitis, alter ex mediis evaneſcat, vel in infinitum abeat, alter ex ipſis eadem ratione finitus remanere non poteſt, quod eodem argumento evincitur. Non poſſunt autem ſimul abire in nihilum, vel in infinitum, ne eorum productum, quod æquari debet finito producto extremorum, fiat nihilum, vel infinitum. Eadem autem eſt demonſtratio, ſi maneant medii, & alter ex

ex extremis abeat in nihilum, vel in infinitum.

837. Porro ubi alter ex terminis extremis, vel mediis proportionis ita in infinitum abſolute receſſit, ut nuſquam jam ſit, verum nihilum illi reſpondere debet, non quantitas quæpiam, quæ dicatur infiniteſima ordinis cujuſcumqne. Id quidem multo evidentius conſtabit, ubi manifeſto demonſtraverimus, quantitates infiniteſimas, quæ in ſe ipſis tales ſint, nullas revera eſſe, ſed a noſtro cogitandi modo pendere tantummodo, ut nimirum indefinitè, non abſolute infinitè parvæ ſint. At hic etiam, ſi nomine infiniti abſoluti intelligatur id, cujus ſaltem alter limes, ut in recta alterum punctum, ita in infinitum receſſit, ut nuſquam ſit; verum ei nihilum reſpondere mille exemplis e Geometria petitis facile evinci poteſt. In fig.254 ubi eſt VR ad VA, ut AB ad RP. Utcumque parva ſit VR reſpondet ſemper alicui RP habenti aliquem terminum P, nec P ita recedit in infinitum, ut nuſquam jam ſit, niſi ubi R recidat in V, facta RP abſolute infinita, & VR penitus evaneſcente: nam accurata demonſtratione oſtenſum eſt (num.149), aſymptotum ſolam in Hyperbola e rectis omnibus ipſi parallelis nuſquam perimetro occurrere. Sic etiam in fig.264 vidimus (num.718) e quatuor CZ, CH, ZL' HP' proportionalibus ſolum coeuntibus omnino punctis C, Z, adeoque evaneſcente prorſus CZ, abire in iufinitum HP ita, ut P' nuſquam jam ſit. Itidem in fig.265 cum ſit CM ad CO, ut CO ad CP, vidimus num,720, CP non excreſcere in infinitum ita, ut nuſquam jam ſit, niſi CM penitus evaneſcente, abeat I in Q. F.254 264 265

838. Hu-

838. Hujus theorematis frequentiſſimus eſt uſus per univerſam Geometriam, & in ipſis Conicarum Sectionum transformationibus eaſdem rite contemplanti ſæpiſſime occurret. Prima ejus pars in quovis etiam angulo rectilineo eſt manifeſta. In fig. 12. cum ſit ER ad RQ, ut EF ad FV, non
F. 12 poteſt evaneſcere RQ, vel abire in infinitum, niſi
9 pariter etiam ER evaneſcat, vel abeat in infini-
28 tum. Secundæ partis exemplum eſſe poteſt receſſus directricis in infinitum ita, ut nuſquam jam ſit, ubi Ellipſis in circulum abit juxta num. 109. Nam eſt in fig. 9 (num. 90) CF ad CM, ut CM ad CE. Ubi autem Ellipſis abit in circulum, debet focus F abire in centrum, ut in fig. 28, evaneſcente prorſus CF. Quare debet CE evadere prorſus infinita ita, ut nuſquam jam ſit. In ipſa autem fig. 9 cum rectangulum ſub CF, & CE æquetur quadrato CM, abeunte CF in nihilum, abit ſimul CE in infinitum, quæ erat pars tertia. Pariter in Hyperbola ad aſymptotos relata rectangulum ſub quavis abſciſſa, & ordinata æquatur (num. 227) rectangulo ſub aliis quibuſvis. Hinc ordinata tum ſolum abit in infinitum ita, ut ejus vertex nuſquam jam ſit, cum recidit in ipſam aſymptotum cum ea congruens, adeoque cum abſciſſa penitus evaneſcit.

839. Canon. 8. *Si binæ rectæ, quæ ad quoddam punctum convergebant, parallelæ fiant; illud punctum ita in infinitum recedit, ut nuſquam jam ſit, angulus vero, quem ad partes in ipſo finito remanentes continebant, evaneſcit, ac is, quem altera continebat cum altera producta, cen-*

ſeri

ſeri debet, ut in duas rectas deſinens. Si vero e contrario concurſus ita in infinitum recedat, ut nuſquam jam ſit, vel angulus ex altera parte evaneſcat, ex altera abeat in duos rectos, illæ ipſæ rectæ evadunt parallelæ.

840. Hic etiam canon eſt admodum manifeſtus, & eo jam ſæpe uſi ſumus. Hoc autem pacto facile demonſtrari poteſt ex præcedenti. In fig.240 ex puncto E3 ducatur recta E3I parallela AB, quæ rectæ AE2 occurrat in I. Erunt ſimilia triangula E3AI, BC2A ob parallelas, eritque E3I ad E3A ut AB ad BC2. Abeat jam recta AE2 in AE3 parallelam BH: evaneſcet E3I, adeoque BC2 fiet infinita, nec concurſus C2 uſquam jam erit. Angulus autem AC2B ſemper æqualis E3AC2 alterno evaneſcet, cum ille evaneſcat; ac proinde ſi ponatur H in BD producta ultra C2, angulus AC2H accedet ultra quoſcumque limites, ad duos rectos, & cenſeri debet in eas deſinens, dum AC2B decreſcit ultra quoſcumque limites, & evaneſcit. E contrario ſi concurſus C2 ita receſſit in infinitum, ut nuſquam ſit, & angulus alter eſt nullus, adeoque alter deſinit in duos rectos; binæ rectæ debent eſſe parallelæ. Si enim non eſſent; alicubi concurrerent, & angulos conſtituerent binos, ac ſimul duobus rectis æquales. F.240

841. Cæterum hinc etiam patet, binis rectis evadentibus parallelis, concurſum abire in infinitum ita, ut nuſquam jam ſit. Quod ipſæ utcumque in infinitum productæ nuſquam concurrant. Angulum autem parallelarum nullum eſſe ex parte finita, patet juxta num.681 ibidem

ex eo, quod anguli AC2B menſura eſt ſemidifferentia arcuum AB, E2D, quæ abeunte E2 in E3, evaneſcit penitus, adeoque & angulus parallelarum evadit omnino nullus.

842. Hujus canonis in transformationibus locorum geometricorum uſus eſt frequentiſſimus. Secunda ejus parte uſi ſumus num.797 ad oſtendendam analogiam, & continuitatem theorematis, quo determinatur angulus, quem binæ tangentes ductæ per extrema puncta chordæ tranſeuntis per centrum, & coeuntes in directrice ibidem continent. Invenimus enim ipſum in Hyperbola, ſi rite accipiatur, ex parte altera evaneſcere, ex altera deſinere in duos rectos, ubi chorda eſt ipſe axis tranſverſus, & tangentes fiunt parallelæ. Multo tamen frequentius occurrit pars prima, quæ pertinet ad receſſum puncti in infinitum, quo ſæpiſſime uſi ſumus. Ejus ope invenimus num.41 alterum axis verticem in Parabola ita in infinitum recedere, ut nuſquam jam ſit, ex eo nimirum quod *t*T, *i*I, quæ in fig.9 in Ellipſi concurrebant in puncto *l* determi-
F. 9
10 nante punctum *m*, evaſerint in fig.10 parallelæ inter ſe, puncto *l* nuſquam jam exiſtente. Ejus ope inventum eſt num.154, rectas parallelas axi Parabolæ, & num.156 rectas parallelas alterutri aſymptoto Hyperbolæ ſemel occurrere perimetro, altera interſectione ita in infinitum recedente, ut nuſquam jam ſit.

843. Porro ejus itidem ope admodum expedite transferuntur ad Parabolam multæ e proprietatibus Ellipſeos. In Ellipſi omnes diametri con-
ver-

vergunt ad centrum (num206): centrum in Parabola recedit in infinitum, cum recedat vertex *m*; quare diametri omnes in Parabola debent evadere parallelæ axi : & ſunt juxta num.206. Radii, qui ex altero foco Ellipſeos incurrunt in ejus perimetrum, convergunt poſt reflexionem ad focum alterum (num. 202): focus alter in Parabola recedit in infinitum cum centro, & vertice altero: hinc ſi is focus concipiatur eſſe primo ille, ad quem radii convergebant, tum ille a quo prodibant, habebimus ibidem illa bina theoremata: radii, qui in Parabola exeunt e foco, abeunt poſt reflexionem paralleli axi : radii, qui adveniunt paralleli axi, convergunt poſt reflexionem ad focum. In Ellipſi in fig.173 exiſtente VO dimidio latere recto principali, recta OC ad centrum F.173
ducta determinat (num. 464) RD æqualem ſubnormali axis RM : in Parabola abit centrum C in infinitum : evadit ergo OD parallela VR, ut exhibet fig. 176 ; & proinde fit RD æqualis ipſi VO, & ſubnormalis æqualis dimidio lateri recto principali : ita autem ſe res habet ibidem. In fig.186 exiſtente VA æquali lateri recto, recta F.186
A*u* ducta ad alterum verticem *u* determinat RL, 187
cujus rectangulum cum VR æquatur quadrato ſemiordinatæ RP : abit in Parabola punctum *u* in infinitum: igitur AL evadit parallela VR, ut exhibet fig.187, & proinde RL æquatur lateri recto VA, & quadratum ſemiordinatæ RP æquatur rectangulo ſub abſciſſa VR, & latere recto: ita autem ſe rem habere conſtat ex num.495.

844. Hic receſſus in infinitum mutat conſtru-

ctiones omnes, ubi punctum, ad quod aliqua recta ducenda erat, abit in infinitum. At constructio nova ſemper inde deduci poteſt, in quam in eo caſu migrat illa prior. Duo autem ſunt caſus. Vel enim rectæ inde ducendæ dabatur aliquod aliud punctum, quod remanet, vel dabatur ſola directio, ut nimirum debuerit duci ex illo concurſu recta cuipiam datæ parallela. In primo caſu res erit expeditiſſima. Satis erit ex illo puncto, quod remanet, ducere rectam parallelam illi, in qua erat punctum, quod abiit in infinitum. In ſecundo aliquo artificio erit opus, quo ante conſtructionis transformationem determinetur aliquod ejus rectæ punctum, quod remaneat, vel diſtantia ab ea recta, cui parallela ſit; & res iterum eodem redibit.

845. En exemplum pro primo caſu: data in fig. 71 quavis chorda Pp in Ellipſi, ad inveniendam diametrum, cujus ea ſit ordinata, ſatis eſt (num. 209)
F.71 72 ducere in fig. 71 ex foco F rectam FA ipſi perpendicularem, quæ alicubi occurrat directrici in I. Inde ſi per centrum C ducatur recta, ea problemati faciet ſatis, & ipſam illam chordam bifariam ſecabit in R. In Parabola in fig. 72. centrum C abiit in infinitum ita, ut nuſquam jam ſit, ſed remanet I. Quare ſatis erit ex I ducere rectam, axi parallelam, quod ibidem eſt præſtitum.

846. Secundi caſus exemplum deſumemus ex problemate tertio generali, quod num. 140 propoſuimus, cujus ſolutio ad omnes diverſos caſus applicata totum hunc noſtrorum elementorum ordinem nobis exhibuit, juxta ea, quæ diximus

num.

num:766, & 767. Generalis nimirum ipſa ſolutio fallebat in binis caſibus, rectarum videlicet parallelarum directrici, & tranſeuntium per focum, quod nos coegit bina ipſi problemata particularia ſubſtituere, quæ in prima, & ſecunda propoſitione præmiſimus.

847. Propoſitionis tertiæ problema illud generale erat hujuſmodi. *Datis foco, directrice, & ratione determinante, invenire concurſum recta datæ cum Sectione Conica*. Conſtructio problematis erat hujuſmodi. Sit in fig.41. F. 41
AB directrix, focus F, recta data HK, quæ directrici occurrat in H. Aſſumpto quovis puncto L, & ducta LG perpendiculari ad directricem, capiatur LS ad LG in ratione determinante data. Centro L, intervallo LS fiat circulus. Ducatur recta LO parallela datæ KH occurrens directrici in O: tum per O recta zOZ parallela FH, quæ ſi alicubi occurrat circulo in T, *t*, ducantur LT, L*t*, & illis parallelæ ex F rectæ, quarum occurſus P, *p* cum recta data HK erunt quæſita puncta.

848. Jam vero ſi recta data ſit parallela directrici, punctum H abit in infinitum. Hinc recta quidem FH, cujus punctum F adhuc remanet, adhuc habetur ducendo ex F rectam parallelam directrici. Sed evadit ſimul etiam LO parallela directrici, adeoque punctum O abit in infinitum. Debet igitur etiam OZ evadere parallela directrici. At ejus nullum jam aliud punctum habemus, unde ea duci poſſit. Binas habebat determinationes, alteram quod ducenda eſſet ex puncto O, alteram, quod deberet eſſe parallela HF. Utra-

que determinatio abiit in unicum paralleliſmum cum directrice. Eam igitur jam ducere non poſſumus, nec ejus ope definire illa puncta T, t, & radios LT, Lt, quibus ducantur parallelæ FP, Fp. En primum in primo caſu incommodum.

849. Quod ſi recta HK tranſeat per focum F, evaneſcet angulus FHK, adeoque & LOZ. Tranſibit igitur OZ per L, & LT, Lt abibunt in ipſam OZ, ac FP, Fp iis parallelæ in ipſam HK, quam non ſecabunt, adeoque occurſus illos cum Sectionis Conicæ perimetro, quos per ſuas interſectiones debebant determinare, indefinitos relinquent. En incommodum ſecundi caſus.

850. Ut primo incommodo medeamur, ſit fig.274 eadem, ac 41. Quæratur LI perpendicularis OZ, ſive hujus diſtantia ab L. Ducatur ipſa, & FR perpendicularis HF, occurrens HK in R, tum RE perpendicularis directrici. Facile conſtabit, fore ſimilia triangula FRH, ILO, & REH, LGO ob latera omnia parallela, ſingula ſingulis. Quare erit FR ad RH, ut IL ad LO, & RH ad RE, ut LO ad LG; adeoque ex æqualitate ordinata FR ad RE, ut IL ad LG. Porro ubi H abit in infinitum, & fiunt FH, KH parallelæ, evadit ipſa FR perpendicularis etiam rectæ datæ KR, quæ proinde datur etiam tum, dato F: datur itidem RE, & LG. Ergo datur etiam LI diſtantia rectæ OZ a centro L, qua data, duci poterit recta ipſa Zz, & problematis ſolutio huc redibit. In fig.275 ſit recta data KR parallela directrici. Ducatur FR ipſi perpendicularis, quæ producatur uſque ad directricem in E. Facto circulo,

F.274 275

culo, ut prius, capiatur LI ad LG, ut eſt FR ad RE, verſus partem utramlibet in ipſa GL, ac per I ducta Zz parallela directrici, ad ejus concurſus T, t cum circulo, ſi qui ſunt, ducantur radii LT, Lt, tum ex F rectæ FP, Fp ipſis parallelæ, quæ ſolvent problema. Erit enim FP ad FR, ut LT ad LI, & FR ad RE, ſive PD, ut IL ad LG; adeoque FP ad PD, ut LT, vel LS ad LG in ratione determinante. Patet autem LI' æqualem LI exhibituram rectas LT, LT', ac Lt, Lt' in directum, adeoque ſolutionem eandem.

851. At hic jam conſtat, circulum, qui conſtructionem nobis ſuggeſſit, neceſſarium non eſſe. Satis erit centro F intervallo rectæ, quæ ad PD, vel RE ſit in ratione determinante, invenire puncta Pp. Id ipſum eſt præſtitum in fig.9. Centro F intervallo rectæ, quæ ad RE eſſet in ratione de- F. 9
terminante, quæſita ſunt puncta Pp: ut autem ea intervalla ſemper præſto eſſent, capta eſt FV, & Fu ad FB in ea ratione, & ductæ per E, & V, ac u rectæ iI, gG, quæ exhibent RQ, & RO ad RF in ratione eadem, adeoque quæſitis intervallis opportunas.

852. Et hoc quidem pacto remedium adhibitum conſtructioni problematis generalis nos perduxit ad hujus primi problematis conſtructionem adeo ſimplicem, & elegantem, & vero etiam fæcundam, quæ Sectionum Conicarum naturam & varias formas, ac proprietates tam multas ſtatim exhibuit. Poterant & alia parari remedia. Sed libuit illam inire viam, quæ ſe prima obtulit, & quæ docet, quid agendum ſit, ubi determinatio

rectæ nos deſerit ob punctum ejus aliquod in infinitum recedens, & binas determinationes, ut hic, in unicam coaleſcentes. Jam ad Canonem 9, quo ſecundi problematis patebit conſtructio.

853. Canon. 9. *Si binæ rectæ ex eodem puncto digreſſæ ſuperponantur, earum angulo evaneſcente; binæ aliæ, quæ iis parallelæ erant ſingulæ ſingulis, evadent inter ſe parallelæ, vel pariter ſuperponentur. Quod ſi in binis triangulis ſimilibus vertex utriuſque abeat in baſim, lateribus baſi ſuperpoſitis; binæ diſtantiæ puncti in quod abit vertex, quod punctum ſuccedit interſectioni laterum, a binis extremis ipſius baſis tam ad ſe invicem, quam ad ipſam baſim, erunt utrobique in eadem ratione.*

854. Hujus etiam Canonis ratio eſt manifeſta. Nam evaneſcente angulo binarum rectarum, evaneſcit angulus earum, quæ ipſis ſunt parallelæ, Quare eæ evadunt parallelæ juxta Canonem 8, vel ſi forte diſtantia earum ſit nulla, ſuperponuntur. In triangulis vero illis cum latera ſint ſemper ad ſe invicem, & ad baſim in eadem ratione, utcumque parum vertices diſtent a baſibus ipſis; oportet omnino etiam, ubi jam in ipſas recidunt, ratio ſit utrobique eadem, ne ſcilicet altera in ipſo verticum appulſu mutetur per ſaltum.

855. Ubi conſtructio illa generalis fig.41, ap-
F. 41 plicatur in fig.48 in Parabola rectis parallelis axi,
48 cum ibi (num.154) congruant puncta GOtS, recta Lt ſuperponitur rectæ LO, evaneſcente illius angulo OLt. Erant autem in fig.41 rectæ HK, Fp parallelæ ipſis LO, Lt. Quare hæ jam parallelæ eva-

evadunt inter ſe, niſi forte HK tranſeat & ipſa per F, ut H2K2. Inde autem conſequitur illud punctum p, quod pertineret ad H1K1, H3K3, abire in infinitum ita, ut nuſquam jam ſit juxta num.154, parallelis nuſquam concurrentibus; ac ex eodem prorſus fonte profluit receſſus in infinitum alterius interſectionis in rectis alteri aſymptoto parallelis in Hyperbola juxta num.156

856. Quod ſi in ipſa fig.41 tranſeat HK per F, rectæ OL, OZ, tL, LT ſuperponuntur; ac pariter ſuperponuntur HF, HK, Fp, PF, & conſtructionem generalem fruſtrantur, ut diximus num.849. At ex hoc Canone tum etiam in ipſa HK jam tranſeunte per punctum F, quod abit in baſes triangulorum FPH, FpH, erunt ſumenda puncta P′, p ita, ut ſit FP ad PH, & Fp ad pH, ut LT, vel Lt nimirum LS ad LO.

857. Porro id ipſum præſtiſſimus in fig.35, & F. 35
36, in quibus recta data eſt FQ, gerente Q vices 36
illius H. Quæſita ſunt puncta P, p ita, ut eſſent
FP ad PQ, & Fp ad pQ, ut eſt in fig.41 LS ad 41.
LO. Commodum autem accidit, ut in fig. 35, & 36 illa ipſa FV jam inventa in primo problemate eſſet ad FQ, ut in fig.41 LS ad LO; eſt enim ibi FV ad FE, ut hic LS ad LG, & ibi FE ad FQ, ut hic LG ad LO. Quare ſatis fuit invenire puncta P, p ita, ut eſſet LP ad PQ, & Lp ad pQ in ratione FV ad FQ. Id autem ſtatim patuit admodum facile præſtari, ſi ſumptis hic in directrice QG, Qg æqualibus QF, ducerentur rectæ per G, & V, ac per g, & V, quæ juxta num.130 ſolverunt problema. Atque hoc pacto ope hujus Cano-

Digitized by Google

nonis ex illa generali conſtructione problematis tertii, hæc etiam ſecundi problematis conſtructio profluxit,

858. Canon. 10. *Si circuli radius in infinitum abeat ita, ut altero extremo manente, centrum nuſquam jam ſit, peripheria circuli abibit in rectam lineam, & recta linea viceverſa habenda erit pro peripheria circuli infiniti.*

859. Hic Canon abunde demonſtratus, eſt a num.722. Eruitur autem etiam ex Canone 8, (num.839). Si enim in fig.271 centrum P ita in
F.271 infinitum recedat, ut nuſquam jam ſit, maneant autem quævis tria peripheriæ puncta A, I, C, tres radii AP, IP, CP evadent paralleli, & anguli API, APC prorſus evaneſcent. Bini igitur reliqui anguli tam ad baſim AI, quam ad AC, evadent binis rectis æquales; adeoque cum ob iſoſceliſmum triangulorum API, APC, ſint æquales ſinguli ſingulis, fient ſinguli ſingulis rectis æquales. Quare anguli API, APC æquales fient inter ſe, & recta AI ſuperponetur rectæ AC, abeunte puncto I in AC, & jacentibus punctis A, I, C in directum. Cumque id in omnibus reliquis peripheriæ punctis locum habere debeat; patet omnem peripheriam, quæ manet in ſpatiis finitis, in unicam abire rectam perpendicularem cuilibet e rectis, per quas centrum creſcit in infinitum.

860. Hujus Canonis uſus non ſemel occurrit
F.23 in noſtris Conicarum Sectionum Elementis. In fi-
24 gura 23 oſtenſum eſt (num.100) in Ellipſi diſtantiam PF cujuſvis puncti P ejus perimetri a foco F æquari diſtantiæ perpendiculari PD a peripheria cir-

circuli deſcripti centro facto in altero foco f, & intervallo axis tranſverſi. Focus f in Parabola abit in infinitnm. Quare is circulus abit in rectam perpendicularem rectæ FE, nimirum in ipſam rectilineam Parabolæ directricem. Et quidem hanc hujus circuli tam in Ellipſi, quam in Hyperbola analogiam cum directrice Parabolæ notavimus etiam num. 102. Circulus ille in Ellipſi cavus verſus F, ad quam plagam ibi jacet ejus centrnm f, abit in rectam, ubi f in Parabola in infinitum recedit, idem vero, regreſſo f in Hyperbola in fig. 24 ex parte oppoſita, convexitatem obvertit foco F.

861. Eodem pacto etiam cum demonſtratum ſit num. 194 pro Ellipſi in fig. 63, & pro Hyperbola in fig. 64 rectam CA ductam e centro C ad concurſum A normalis FA cum tangente æquari ſemiaxi tranſverſo CM; patet, in iis concurſum ipſum A normalis cum tangente jacere in perimetro circuli deſcripti diametro M*m*, qui concurſus A in Parabola in fig. 65 (num. 194) incidit in rectam MA normalem axi AF. Res eodem recidit. Circulus ille in Ellipſi in fig. 63 obverteret cavitatem foco F, abeunte *m* in infinitum in Parabola, abiret in fig. 65 in rectam ipſi FV perpendicularem, & regreſſo *m* ex parte oppoſita ex infinito in fig. 64 in Hyperbola, jam ipſi F convexitatem obverteret. F. 63 64 65

862. Canon. 11. *Si binæ rectæ altero ſaltem utriuſque limite ita in infinitum abeunte, ut nuſquam jam ſit, infinitæ evadant; debent in ipſo infinito cenſeri, ut aſſecutæ illam rationem, ad quam ultra quoſcumque limites acceſſerunt, dum*

in

in infinitum excreſcerent: & ſi binæ aliæ rectæ fuerint ſemper in earum ratione, ac illis excreſcentibus in infinitum, remaneant finitæ; habebunt accuratè eam rationem ipſam, ad quam illæ ultra quoſcumque limites acceſſerant. Ratio autem, ad quam accedent binæ quantitates, dum in infinitum excreſcunt, & quam aſſecutæ cenſeri debent, ubi jam infinitæ ſint, poteſt eſſe ratio æqualitatis, vel inæqualitatis finita, vel excreſcens, aut decreſcens ultra quoſcumque limites; erit tamen ſemper ratio æqualitatis, ubi differentia ipſarum finita maneat, vel nulla, & differentia ſemper manebit finita, vel nulla; ſi binæ rectæ terminatæ ad idem punctum ab aliis binis punctis abierint in infinitum, manentibus bis binis punctis, & abeunte in infinitum illo communi ita, ut nuſquam jam ſit.

863. Prima theorematis pars demonſtratur à continuitatis lege, quam cum alibi ubique tam ſanctè Geometria ſervet, ſervare debet etiam ibi, ubi quantitates in infinitum excreſcunt, quæ ibi etiam, ubi & oculos noſtros, & mentem fugiunt, debent, ſi poſſibiles ſunt, in eo ſtatu habere id, ad quod acceſſerant ultra quoſcumque limites, nec per ſaltum illo unico momento temporis aliam rationem habere diverſam ab ea, a qua temporis præcedentis intervallo quam minimo, diſtabant quam minimum. Finitæ autem illæ, quæ in earum ratione erant, & remanent adhuc finitæ, adeoque omnino aliquam rationem habent, debent habere illam, ad quam acceſſerant ultra quoſcumque limites.

864. Por-

864. Porro ejuſmodi ratio poteſt eſſe æqualitatis, cum poſſint æquales perpetuo eſſe dum abeunt in infinitum. Immo etiam ad rationem æqualitatis accedet, licet earum differentia finita maneat, ut videbimus paulo infra. Poſſunt autem habere rationem finitam quoque. Sic ſi in fig.243 manentibus punctis F, H evadant HL, FG parallelæ ipſi CE; puncta I, & G ita in infinitum recedent, ut nuſquam jam ſint, & rectæ CI, CG, ac HI, FG habebunt ſemper in receſſu eorum punctorum rationem finitam quamcumqne, quam nimirum habebunt rectæ CH, CF finitæ. Ac ſi interea ipſa quoque puncta F, H moveantur utcumque, ſed rectis HI, FG delatis ad paralleliſmum, maneant alicubi; rectæ illæ CI, CG cenſeri deberent aſſecutæ rationem eandem, in qua relinquuntur CH, CI; & ſi quæ quantitates ſint ſemper, ut ipſæ CI, CG, & ipſis abeuntibus in infinitum, finitæ remaneant: debebunt habere tum rationem illam, quam habent CH, CF. Poteſt autem ea ratio etjam in infinitum excreſcere. Sic in fig. 260, decreſcente VR ultra quoſcumque limites, creſcit ultra quoſcumque limites tam RI, quam RE, & abeunte R in V, jam ita in infinitum abeunt, ut I, & E nuſquam ſint; & tamen RE ad RI erit ſemper, ut AH ad RI, ut AV ad RV, quæ ratio creſcit ultra quoſcumque limites, dum manente VA, minuitur VR ultra qnoſcumque limites, ac demum evaneſcit. Eſt id quidem ingens quoddam infiniti myſterium; ut licet jam limes I ita in infinitum per omnes magnitudinum gradus excreverit, ut nuſquam jam ſit; adhuc tamen ultra

F.243 260

tra ipſum habeatur ſpatium infinities magis protenſum quodammodo, quo RE extendatur infinities magis, & quo ſe punctum E abdiderit. At ſi infinitum abſolutum admittitur, id quidem ad ſervandam analogiam omnino admitti debet, & eſt ſimile illi myſterio, quod ſupra num.769 notavimus,

865. Rationem autem æqualitatis cenſeri debere, ubi binæ quantitates in infinitum abierint, differentia manente finita, eſt adhuc myſterium; cum æqualia eſſe non poſſint, quæ differentiam habeant; adhuc tamen ad analogiam retinendam eſt neceſſarium, & ſic evincitur. Ejuſmodi quantitates non poſſunt habere ullam rationem inæqualitatis, utcumque parum diſiunctam a ratione æqualitatis. Exprimant enim bini termini finiti, utcumque parum inæquales rationem illorum, & erit, dividendo, horum differentia ad minorem, ut illarum differentia illa finita, ad minorem ex iis, quæ ponuntur infinitæ. Hæc igitur ex illis ita penderet, ut limitem alicubi deberet habere omnino. Vis demonſtrationis patebit in exemplo ſequenti. Ex natura tangentis
F.265 IP in fig.265 eſt in circulo etiam, ut in quavis Ellipſi juxta num.411, NP ad PO, ut NM ad MO. Capiatur CM′ æqualis CM, & ipſarum NM, MO differentia erit M′M, ipſarum vero NP, PO differentia erit NO. Jam vero ipſæ NP, PO non poſſunt ita in infinitum abire, ut nuſquam jam ſit earum limes P, niſi parallelæ evadant, & punctum I recidat in Q. Etiam in illo caſu ipſarum NP, PO differentia finita eſt, nimi-

mirum æqualis finitæ illi NO. At ipſarum NM, MO differentia illa M'M penitus evaneſcit, & fit verum nihilum, coeuntibus penitus in C ipſis M'M. Illarum ratio evadit accurata æqualitatis ratio. Quare etiam binæ illæ NP, PM licet differant per NO, cenſeri debent ad æqualitatis rationem delatæ, nec, quæ iis proportionales ſunt, poſſunt in eo caſu non habere rationis æqualitatem accuratam.

866. Plerumque quantitatibus infinitis ajunt reſpondere quantitates infiniteſimas, quæ inaſſignabiles ſint, ſint tamen aliquæ, & relationes ad ſe invicem habeant. Quod a nobis aſſignari poſſint, vel non poſſint, id a noſtro cognoſcendi, & determinandi modo pendet, & aliud mentis finitæ genus ad aliam magnitudinum relationem cognoſcendam, aſſignandamque deveniet, aliud ad aliam, quæ minoris, vel majoris inæqualitatis rationem ſecum ferat, uſque ad quoſdam limites a vi mentis ipſius pendentes. Idcirco nos ad evitandas æquivocationes utimur, ubi opus eſt, vocibus, quæ ab ipſa aſſignatione non pendent. Ubi de infiniteſimis agemus, ſtatuemus illud, ac demonſtrabimus, lineas, ſuperficies, ſolida, quæ in ſe determinata ſint, quæ nimirum ſuos alicubi limites habeant, finita eſſe, & finitam inter ſe rationem habere. Hìc autem ita eas voces adhibemus, ut infinitum dicamus id, cujus ſaltem aliquis limes nuſquam jam ſit. Non quærimus an ipſe a nobis aſſignari poſſit, an non. Utcumque remotum ſit punctum P, dummodo alicubi ſit; punctum I non erit in Q, nec M, M'

in

in C, & ipſum quidem P, ſive aſſignari poſſit a nobis illa ejus diſtantia ab O, & N, ſive non poſſit, ita erit alicubi, ut ultra ipſum alia habeantur, ſive ut poſſit ulterius excurrere, creſcente ipſa illa diſtantia; ac eodem pacto puncta I, M, M′ ita erunt alicubi, ut illud cum Q, hæc cum C non congruant, ſed diſtantiam ab iis habeant quandam in ſe determinatam, ſive ea a nobis aſſignari poſſit, ſive non poſſit, quæ diſtantia itidem adhuc decreſcere poterit. Atque ea erit ipſarum diſtantiarum I a Q, & M, M′ a C relatio ad diſtantiam puncti P alicubi exiſtentis a punctis O, & N, ut illa quidem augeri ſemper poſſit, hæc minui, nec ulla illarum ſit maxima, harum minima; illarum autem omnium limes quidam ſit infinitum abſolutum, in quo P nuſquam jam ſit, harum nihilum, in quo I a Q, & M, M′ a C diſtantiam habeant omnino nullam, ſed cum ipſis accuratè congruant. Punctum autem P nuſquam tum eſſe, qua phraſi ſemper uſi ſumus, eſt manifeſtum ex eo, quod duæ rectæ parallelæ, quæ utcumque producantur, nunquam ad ſe invicem accedunt ne minimo quidem, utcumque exiguo in ſe determinato intervallo, nuſquam revera concurrunt; licet infinitarum magnitudinum relationibus expiſcandis haberi poſſint pro concurrentibus in ipſo infinito noſtræ menti impervio, niſi forte non impervium tantummodo ipſum ſit, ſed pro abſurdo, haberi debeat, ut mox videbimus.

867. Cæterum ſi rectæ NP, PO exprimant quantitates quaſcumque, quæ in abſolutum infini-

finitum abeunt, relicta NO finita differentia, rectæ vero NM, MO ſint quantitates finitæ earum rationem exprimentes, & ipſæ NM, MO non evaſerint accuratè æquales, erit aliqua ipſarum differentia MM' in ſe determinata. Hinc erit aliqua diſtantia MC in ſe determinata, aliqua MI ipſi reſpondens, & non congruens cum CQ, adeoque aliqua tangens GF non congruens cum DE, & aliquod punctum P in aliqua in ſe determinata diſtantia ab O, & N. Quare ſi illæ NP, & PO ad rationem æqualitatis non fuerint delatæ, utcumque parum ab ea diſtent, non erunt abſolutè infinitæ ita, ut limes P nuſquam jam ſit.

868. Ad hoc myſterium utcumque evolvendum, oportet quantitatem finitam quamcumque reſpectu abſolutè infinitæ habere prorſus pro nulla, quanquam ea quidem cum aboluto nihilo confundi non poſſit. Sic & (num.741) hiatum Parabolæ licet infinitum, coacti ſumus conſiderare, ut punctum, ut verum nihilum, reſpectu abſolutè infinitæ peripheriæ, circuli retinentis centrum in vertice ipſius Parabolæ.

869. Poſtrema canonis pars ſic demonſtratur. Vel bina puncta quæ remanent ſunt, ut N, & O in eadem recta AB, in qua punctum P in infinitum receſſit, & patet ipſarum NP, PO differentiam fore illam NO finitam. Vel in diverſis rectis ea puncta ſunt, ut in fig.266 puncta H, C F.266
rectarum CP, HP, quæ evadunt abſolutè infinitæ, ubi punctum P ita in infinitum receſſit, ut nuſquam jam ſit; & in hoc ſecundo caſu, ante

 quam

quam punctum P illa infiniti nobis impervia velut voragine abſorbeatur, ſi radio PC fiat circuli arcus CR occurrens rectæ PH in R; ipſarum PC, PR differentia erit HR. Vbi autem punctum P in infinitum receſſerit, arcus CR debebit congruere cum perpendiculo CV per canonem 10. Quare differentia fiet HV, quæ quidem vel nulla erit, ſi nimirum CH ſit perpendicularis HP, puncto H congruente cum V, vel finita erit, extantibus adhuc punctis H, & V.

870. Hujus canonis uſus frequens occurrit, ſecundæ partis potiſſimum. Num. 25 cum datis
F. 6 in fig. 6. binis punctis alternis A, C proportionis
265 harmonicæ, & data ejus ratione, quæreremus reliqua duo B, D, invenimus, ſi ratio data foret æqualitatis, B quidem abire in mediam rectam AC in R, D vero ita in infinitum recedere ut nuſquam jam eſſet. Res eodem rediit, atque hic in fig. 265, & rectæ RD, CD ad æqualitatis rationem delatæ ita in illam infiniti barathrum merſerunt punctum D, ut nuſquam jam eſſet, & ipſæ quidem abſolutè infinitæ evaderent, differentia autem ipſarum jam eſſet nulla.

871. In applicatione theorematum Ellipſeos, vel Hyperbolæ ad Parabolam ſummus ejus uſus
F. 9 haberi poteſt. Quoniam rectæ F*m*, *m*E in fig. 9.
10 debent acquirere rationem æqualitatis, ubi ea in Parabolam migrat, vertex *m* axis tranſverſi in ipſa Parabola in fig. 10. nuſquam jam eſt, & ipſæ evadunt abſolutè infinitæ. Hinc vero ad Parabolam transfertur theorema pertinens ad Ellipſim, & Hyperbolam propoſitum num. 74, quod

quod nimirum quadrata ſemiordinatarum RP in fig. 9. & 11 ad axem tranſverſum ſint, ut rectangula MRp ſub abſciſſis a binis verticibus. Dum eæ mutantur in Parabolam figuræ 10, abit m in infinitum ita, ut nuſquam jam ſit. Quare ſi binæ aſſumantur ſemiordinatæ, binarum mR, quæ ad eas pertinent, & evadunt abſolutè infinitæ, ratio evadit ratio æqualitatis, cum differentia ipſarum ſit illa finita diſtantia binorum punctorum R. Quare illa rectangula erunt, ut ſolæ abſciſſæ MR a vertice M, qui in Parabola manet. Id autem ita ſe habere conſtat; id enim ipſum eodem numero pariter propoſuimus: atque eo modo ex Ellipſi, & Hyperbola ad Parabolam transfertur eadem proprietas generalius pro diametris omnibus propoſita num.357, cum abeunte in infinitum centro in Parabola, ſimul cum ipſo cujuſvis diametri alter vertex in infinitum abeat, nec uſquam jam ſit.

872. Ejuſdem canonis ope illa etiam Parabolæ proprietas, quam num. 200 demonſtravimus in fig. 65, quod nimirum foci radius FP F. 63 æquetur tam diſtantiæ FI ejuſdem foci a normali, quam diſtantiæ FQ ejuſdem a tangente computatis in axe, derivari poteſt ex proprietate 65 Ellipſeos propoſita num. 189 in fig. 63, quod normalis ſecet Ff in ratione laterum FP, fP, & quod concurrentibus normali, & tangente axi tranſverſo in I, & T, conſtituant proportionem harmonicam, quatuor puncta f, I, F, T. Nam ex prima alternando erit FP ad FI, ut fP ad fI, quæ ratio cum abeunte in Parabola puncto f in

infinitum , & remanentibus FP , FI , evadat ratio æqualitatis , erit in ea etiam FP æqualis FI , Ex ſecunda vero eſt FT ad FI , ut *f*T ad *f*I ; quæ ratio pariter abeunte *f* in infinitum , & manentibus T , I, evadit ratio æqualitatis ; unde fit , ut in fig.65 rectæ FP, FI, FT æquari debeant inter ſe .

873. Et his quidem caſibus facile fuit canonem hunc applicare ; at artificio aliquo opus erit nonnunquam , ut ipſum applicari poſſit , ut ubi plures , quam duæ quantitates infinitæ fiunt ob unius puncti tantummodo receſſum in infinitum . In Ellipſi (num.419) ſunt continue proportiona-
F.153 les in fig. 153 tres rectæ CR , CV , CQ , ſive ab-
155 ſciſſa a centro , ſemidiameter , & ſubtangens a
centro computata . Abeunte centro C in infinitum , ubi ea in Parabolam mutatur , debet ea proprietas aliam parere aptatam ipſi Parabolæ . Ea ſic facile inveniri poterit . Cum ſit eadem ratio CR ad CV , & CV ad CQ , erit pariter eadem ratio differentiæ antecedentium RV ad differentiam conſequentium VQ . Erit igitur VR ad VQ, ut CR ad CV . Porro abeunte centro C in infinitum, ac manentibus R , & V , ea ratio evadit ratio æqualitatis ; evadunt igitur æquales etiam VR , VQ in Parabola , nimirum diſtantia VR verticis V in fig. 155 a normali æqualis diſtantiæ VQ a tangente computata in axe , ſive ſubtangens dupla abſciſſæ , quod num.405 de ipſa Parabola demonſtravimus demonſtratione peculiari .

874. Majus aliquod artificium requiritur plerumque , ubi non commune aliquod punctum binarum rectarum abit in infinitum , ſed bina , ſingu-

la-

larum ſingula, vel ad demonſtrandum, differentiam manere finitam, ex qua profluat ratio æqualitatis, vel ſi differentia quoque ita in infinitum excreſcat, ut earum ratio & finita cenſenda ſit, & adhuc ratio inæqualitatis, ad inveniendam rationem ipſam, & ſubſtituendas quantitates finitas, quæ eam rationem exprimant. Adhuc tamen non deerunt plures methodi exercitato Geometræ ad id præſtandum. Bina pro binis hiſce caſibus exempla alterum pro altero exhibebit ſimul ipſum theorema illud generale, quod num.299. propoſuimus pro rectis omnibus Sectioni Conicæ bis occurrentibus, quod hoc ipſo artificio tranſtulimus ad rectas axi parallelas in Parabola, & utrilibet aſymptoto in Hyperbola, ac ejus ope invenimus theorema alterum ipſi ſubſtitutum pro hiſce caſibus particularibus num.305 & peculiari demonſtratione repetitum deinde ex finita Geometria.

875. Theorema generale huc reducitur. Si in fig.91 rectæ quotcumque PLp ductæ per quoddam punctum L occurrant Sectioni Conicæ bis in punctis P, p; rectangula ſub earum ſegmentis LP, Lp interceptis inter id punctum, & illos occurſus erunt ad ſe invicem in ratione, quæ data Conica Sectione, & ipſarum rectarum inclinationibus, erit ſemper conſtans, utcumque mutato puncto L. Abeat jam altera interſectio, ut p, in infinitum, quod accidit ſolum rectis axi parallelis in Parabola, vel alteri aſymptoto in Hyperbola: rectangulum PLp evadit infinitum. Sed ſi rectæ Lp in eo caſu ſubſtituatur recta, quæ mutato puncto L, mutetur in eadem ratione, in F. 91

qua mutatur ipſa Lp, jam etiam rectanguli ſub LP, & ſub hac recta ratio ad reliqua rectangula manebit conſtans, nec immutata a mutatione puncti L.

876. Porro omnes rectæ Lp infinitæ in Parabola habendæ erunt pro æqualibus, & in Hyperbola pro proportionalibus rectis, quæ in quovis angulo ducantur ex ipſis punctis L ad illam aſymptotum, cui Lp evaſit parallela. Nam ſi in
F.276 fig.276 ducantur per bina puncta L, L' binæ Pp,
277 $P'p'$ parallelæ axi tranſverſo, tum L'A, P'D, $p'd$ perpendiculares ipſi Pp; patet, differentiam binarum $L'p'$, Lp fore æqualem ſummæ, vel differentiæ ipſarum LA, pd, cumque ambas Pp, $P'p'$ debeat ſecare idem axis conjugatus bifariam; patet, ipſam pd, æquari PD. Cum igitur mutata Ellipſi in Parabolam, & abeuntibus punctis p, p' in infinitum, maneant finitæ AL, PD; manebit finita illarum differentia; & proinde ratio erit æqualitatis. At in fig.277 ſi binæ chordæ Pp, $P'p'$ inter ſe parallelæ occurrant binis aſymptotis in binis punctis H, b, & H', b', ducantur autem, ex binis quibuſvis earum punctis L, L' binæ rectæ LI, L'I' in quovis angulo ad aſymptotum Cb, erunt Lb, $L'b'$, ut LI, L'I' ob triangulorum ſimilitudiem. Abeuntibus autem punctis p, p' in infinitum, cum pb, $p'b'$ ſemper (num.221) æquentur finitis PH, P'H', erunt Lp ad Lb, & $L'p'$ ad $L'b'$ in ratione æqualitatis ob differentiam finitam. Igitur & Lp, $L'p'$ erunt, ut LI, L'I'. Hinc in iis caſibus pro ea conſtanti ratione rectangulo ſub binis diſtantiis Lp, $L'p'$ a binis occurſibus p, p' ſubſtitui poterit diſtantia ab unico occurſu in recta qua-

quavis conſtanti in Parabola, vel illi ipſi aſymptoto inclinata in Hyperbola in angulo conſtanti quovis ex illo ipſo puncto dato. Atque id ipſum præſtitimus illo num.305, & rite factum per finitam Geometriam demonſtravimus.

877. Liceret hic addere jam Canonem 12 huic ſimilem pro rectis, quæ in infinitum decreſcunt ita, ut demum evaneſcant, quæ pariter, dum ita decreſcunt, ad rationem aliquam accedunt ultra quoſcumque limites, quam finitæ quantitates acquirunt eo momento temporis, quo illæ evaneſcunt, quæ ratio pariter eſſe poteſt vel utcumque inæqualitatis finitæ, vel etiam aucta, vel imminuta in infinitum, cui canoni tota innititur methodus, quam Newtonus appellavit primam naſcentium, vel ultimam evaneſcentium, & ex qua methodus illa, quam idem appellat *fluxionum*, ortum duxit. Quod ſi quantitates, dum in infinitum decreſcunt, infiniteſimæ dicantur, & harum infiniteſimarum certi ordines, & gradus deſignentur, ac ad certos canones redigatur eorundem uſus, illa omnis uberrima ſane differentialis habetur methodus, quæ calculo potiſſimum adjuta tantos fecit tam brevi in omni & pura, & mixta Matheſi univerſa progreſſus, qui quidem gradus ſi etiam in quantitatibus in infinitum excreſcentibus pariter conſiderentur, habetur quiquid ad methodum infinitorum pertinet in Geometria.

878. At ea omnia nos alteri tomo edendo, cum primum per tempus licuerit, reſervamus; in promptu enim eſt omnis materia: at e ſolidioribus principiis conabimur ſtabilire omnia. Nam nec illud

nobis ſatisfacit, quod Newtonus de evaneſcentibus quantitatibus habet, eas ad quandam rationem devenire, neque ante quam evanuerint, neque poſt, ſed tum, cum evaneſcunt; tum enim, cum evaneſcunt, jam nihil ſunt, neque ullum eſt ultimum eſſe, quod acquirant, ſed vel ſunt aliquid adhuc, quo minus erunt deinde, vel nihil omnino ſunt. Multo autem minus illud arridet, quod alii uſurpant, qui infiniteſimas quantitates contemplantur, ut aliquid, quod in ſe determinatum ſit, & rationem ad finitas habeat minorem quacumque data. Cum enim datam dicunt, ſi intelligant, quæ reapſe data ſit; fieri ſane poterit, ut nec data ſit ratio 1 ad 1000, & tunc ratio 1 ad 2000 minor erit, quacumque data; ſi vero intelligant etiam dabilem, quod vere intelligunt ii, qui ejuſmodi quantitates inaſſignabiles vocant; difficultatem ii quidem nequaquam eludunt. Si enim ita aſſignabilem, & dabilem dicunt, ut a nobis diſtinctè percipi poſſit ipſa earum magnitudo per relationem ad menſuras, quas intuemur; & id a mentis ipſius pendebit vi, ut ſupra diximus num. 866, ita, ut quod reſpectu alterius mentis dari, vel aſſignari non poſſit, poſſit ab altera. Cumque mentis cujuſpiam vis fines habeat omnino certos; id, quod uni aſſignabile erit, atque finitum, alteri erit inaſſignabile, & infiniteſimum, ac duplum infiniteſimi reſpectu ejuſdem mentis erit finitum. Si vero mentis ipſius vim, & perceptionem diſtinctam nequaquam reſpiciunt; cur eæ quantitates, quibus in univerſa Geometria, & Analyſi perpetuo ùtimur, quarum ope tam

tam longas demonſtrationes perteximus, quarum ordines, & gradus, ac relationes ad ſe invicem tam multas perſequimur, aſſignari non poſſint? Cur ratio cujuſdam quantitatis ad finitam quandam dicatur minor quacumque dabili, cum ejus ipſius quantitatis dimidium ad eam ipſam quantitatem finitam, duplo adhuc minorem rationem habeat? Illud unum eſt reliquum, ut ubi ratio *minor quacumque data* dicitur; ſignificetur id, quod nomen *datum* in Geometria plerumque exprimit, nimirum *determinatum*, & infiniteſimæ quantitates in ſe ipſis determinatæ, qua voce ad tollendas æquivocationes utimur, nullæ ſint: ſed infiniteſimæ dicantur eæ, quas nos indefinitè concipimus, quarum nimirum magnitudinem non definimus, ſed ita parvam accipimus, ut ad noſtrum libitum imminui poſſit, ſine ullo fine a nobis determinato, quo nimirum liceat demonſtrationem deinde reducere, ſi opus ſit, ad abſurdum. Ea acceptione infiniteſimorum habita, & rite confirmata, ſolidiſſimæ totius methodi demonſtrationes obveniunt, quas nos ſimul cum earum uſu in curvarum generalibus proprietatibus per ſimplicem etiam Geometriam eruendis, ac curvarum utiliorum elementis inde repetitis eodem illo tomo perſequemur.

879. Eodem autem pacto & quantitates, quæ in infinitum excreſcunt, accipi indefinitè poſſunt, ac demonſtrationes, quæ inde profluunt pro ipſis curvarum transformationibus, ſunt ſanè multo & ſolidiores, & ipſi noſtræ menti magis perviæ, quam eæ, quas ex infiniti abſoluti myſteriis hìc

adhibuimus. Myſteria enim ipſa infiniti abſoluti extenſi ejuſmodi ſunt, ut nos ea ſtudioſiſſimè perſequentes demum deduxerint ad cenſendum potius impoſſibile prorſus, & repugnans infinitum abſolutum in quantitate, quam tantummodo finitæ noſtræ menti impervium. Canones, quos hìc præſcripſimus ad eruendas finitarum quantitatum, quæ poſt transformationem reſiduæ ſunt, relationes mutuas, habemus pro certiſſimis in iis omnibus, quæ pertinent ad ipſas quantitates finitas reſiduas, & bina ipſorum Canonum genuina fundamenta cenſemus eſſe illa, quæ ſuis locis protulimus. Ubi nimirum punctum aliquod traducitur per infinitum, & pluſquam infinitæ quantitati ſubſtituitur negativum ejus complementum ad integrum infinitum circulum juxta num. 776, fundamentum eſt ipſa homogeneitas Locorum Geometricorum ſimplicium; quorum partes omnes eaſdem habent relationes ad ſe invicem, ut ibidem monuimus: ubi vero punctum nuſquam jam eſt, ſed infinito concipitur demerſum, atque obrutum, habetur continuitatis lex, quæ cogit quantitates finitas poſt ipſam transformationem remanentes eam habere rationem, ad quam acceſſerant ultra quoſcumque limites ipſæ, quæ remanent, & ad quam accedere debuiſſent illæ etiam, quæ in infinitum excreſcentes concipiuntur, niſi alicubi neceſſario obrumperentur, ante quam abſolutè infinitæ evaderent. Cenſemus autem abrumpi alicubi debere omnino ita, ut nunquam aſſequi poſſint omnem illam extenſionem quæ poſſibilis eſt. Quidquid exiſtit, id omne fines habere certos

ſos, arbitramur, ultra quos alii, ſed omnes itidem certi, & definiti limites habeantur, ut dierum futuræ æternitatis numerus a præſenti die ad quemcumque determinatum, qui extiturus eſt aliquando, finitus eſt; ſed alius haberi poteſt, & omnino habebitur ipſo major. Eodem prorſus pacto nobis perſuaſum eſt, rerum quarumcumque exiſtentium numerum, ut hominum, neceſſario ſemper finitum fore, atque id ita, ut eo major alter haberi ſemper poſſit, qui & ipſe finitus ſit, nec unquam ſimul poſſit exiſtere totum id, quod, ſi ſeorſum ſpectetur, poteſt exiſtere. Neque enim fieri poteſt, ut ſumma Divini Conditoris Omnipotentia vires exhauriat ſuas, & condat quæcumque condere poſſit, quin alia ſuperſint ſine fine, quæ itidem condat, ſi velit, quod nos quidem appellare ſuemus *finitum in infinitum*, & ibi uberius explicabimus, ubi hanc infinitorum theoriam fuſius perſequemur. Eodem nimirum pacto, & rectam lineam, & curvilinei cruris cujuſcumque tractum, cenſemus, non poſſe ſimul exiſtere cum ea omni longitudine, quam ſucceſſive habere poteſt, quæ nimirum quotieſcumque extiterit, finita erit, & alias ſe longiores purè adhuc poſſibiles poſt ſe relinquet ita, ut nulla ſit ultima earum, quæ exiſtere poſſunt, & maxima, quemadmodum nulla itidem longitudo eſt minima, ſed quacumque determinata longitudine utcumque parva, quæ non ſit abſolutum nihilum, aliæ adhuc minores, & a nihilo minus diſtantes haberi poſſunt.

880. Interea colligemus hic illa myſteria, quæ nobis demum viſa ſunt migrare in vera abſurda,

quæ

quæ quidem ſunt pleraque. Mittimus illum noſtræ menti impervium ſane tranſitum puncti per infinitum ad partes oppoſitas, & nexum rectæ utrinque in infinitum productæ in partibus oppoſitis, qui quidem omnem excedit captum humanæ mentis; eſſet enim, quo is evitari poſſet, concipiendo punctum, quod ex oppoſita parte regreditur, non eſſe idem, ac id, quod receſſerat, ſed aliud, & ſolum poſt integram rectæ converſionem punctum idem, per dimidiam infiniti circuli circumferentiam evagatum, redire; licet id ipſum omnem Locorum Geometricorum analogiam perverteret, ut facile oſtendi poſſet. Mittimus rationem æqualitatis in quantitatibus inæqualibus, quæ nimirum differant quantitate finita; cum reponi poſſit, pro nihilo habendam eſſe quantitatem finitam reſpectu infinitarum; quamquam aliud omnino eſt haberi debere pro nihilo, aliud revera nihil eſſe; quod tamen ad veram æqualitatem requiritur. Mittimus illa infinita ſpatia extenſa longe ultra alia infinita, quæ concipienda diximus num 771, quo nimirum infiniti illi circuli excurrant alii longe ultra alios, quorum ope negativæ quantitates ortæ ex tranſitu per infinitum retineant tationem quandam finitam inæqualitatis cujuſvis; cum ea non aliter demonſtrentur, quam ex ſola analogia; quanquam in tanta exemplorum accuratiſſime demonſtratorum multitudine ipſa etiam analogia ingentem habere vim debet.

881. Hiſce omnibus omiſſis, quæ poſſent vel non admitti, vel pro myſteriis quibuſdam haberi nobis imperviis, quid illud, quod finita, & accu-

curata evidentiſſima Geometria demonſtratione evincitur, ut num. 864 innuimus, in fig. 260 rectam RE debere infinities majorem eſſe, quam RI, ubi in infinitum excreſcunt? Concipiatur recta VO ita in infinitum extenſa, ut ejus vertex nuſquam jam ſit, nimirum ut omnem eam, ſi fieri poteſt, extenſionem habeat, quam habere poteſt, & quæ utique a curvarum ſibi adjacentium deſcriptione non pendet. Concipiatur jam ipſi adjacens ſola curva TE*t*. Nullum ſane erit ſegmentum finitum ipſius rectæ VO, quod aliquando ordinata RI non ſuperet in motu continuo puncti R verſus V. Igitur ſi curva TB*t* extenditur, quantum extendi poteſt, nihil ex recta illa ultra ipſam procurrit, & appellente R ad V, ordinata ipsâ RI, puncto jam I demerſo in illis infiniti latebris, atque obruto, illi VO pariter infinitæ æquabitur. Quo igitur procurret ultra RE, ut ipſa RI infinities ſit major? An ſecunda curva accedente, ipſa illa recta VO, quæ ab iis, ut diximus, non pendebat, protenditur, ut novam ordinatam RE ſibi jam congruentem excipiat? An non noſtræ tantummodo mentis a fine abſtrahentis figmentum eſt & rectæ illius, & curvæ continuatio ſine fine? Nam eæ, ſi utcumque finitæ alicubi ſunt, nihil abſurdi involvunt. Sane utcumque magnæ ordinatæ finitæ RI alia RE in quavis ratione major reſpondere poteſt, congruenti cum tota VO *abſolutè* infinita non poteſt. F.260

882. Quid in illo hiatu Parabolæ, in fig.270? Licebit ſane ibi deprehendere abſurdum potius graviſſimum, quam impervium noſtræ menti myſterium, F.270

rium. Nam ex eo, quod recta DA excurrat ſemper ultra ipſam Parabolam, niſi congruat cum ipſo axe DA2, eruimus num. 741 ſpatium cruribus S, T infinitis interceptum minorem quavis finita ratione rationem habere ad arcum circuli circumquaque infiniti. At id ipſum ſpatium admodum facile demonſtrabitur majus, quam ipſius infinitæ peripheriæ ſubquadruplum. Certiſſimum enim eſt in Geometria ex Archimedis inventis, diametrum ad peripheriam habere rationem majorem, quam 1 ad 4, cum habeat ſane majorem etiam, quam 7 ad 22. At hiatus ille facile demonſtratur æqualis ipſius circuli infiniti diametro. Ubicumque enim aſſumatur punctum G in tangente B4A4 in infinitum producta ita, ut omnem eam habeat extenſionem, ſi id fieri poſſit, quam habere poteſt, ducaturque recta ipſi axi DA2 parallela; ſemper Parabolæ perimetro occurret in aliquo puncto P. Quare hiatus ille idem tantundem extenditur, quantum ipſa circuli infiniti diameter, cui proinde æqualis erit. Eſt igitur eadem ratio & major, & infinities minor, quam 1 ad 4, quod eſt abſurdum. Myſterium erit, ſi dicatur, axem DA2 infinities magis protendi, quam tangentem DB4, DA4. Et quidem id omnino dicendum erit; nam DG3 ad G3P3, ſive DR, eſt, ut radius ad tangentem anguli G3DP3, qui cum abeunte H3 in H2, quo caſu puncta G, & R ita in infinitum abeunt, ut nuſquam jam ſint, abeat in rectum, ea ratio tum evadit quantitatis finitæ ad infinitam; unde erui deberet, axem Parabolæ infinitum infinities longiorem eſſe, quam infinitam tangentem. At

an

an iccirco recta DA2 infinities magis protendi poteſt, quam DA4, quod Parabola ipſis acceſſit, cujus illa eſt tangens, hæc vero axis? Quid ſi aliam deſcriberemus Parabolam axe DA4, tangente DA2? Num idcirco illa, quæ infinities minor erat, infinities major evaderet?

883. Maximam hoc quidem argumentum apud nos vim habet, & ei ſimillimam alia quamplurima, quæ proferri poſſent, ut quoddam aliud, quod jam ab anno 1741 protulimus in diſſertatione *de Natura, & uſu Infinitorum, & infinite parvorum*, ubi oſtendimus, admiſſo infinito abſoluto in extenſione, partem obvenire æqualem, immo etiam majorem toto. Accedit autem & illud, quod, ut num.837 vidimus, infinito abſoluto poſt ipſum, & finitam aliquam quantitatem pro tertia continue proportionali reſpondet nihilum abſolutum, non quæpiam quantitas, quæ infiniteſima dici debeat, & partes, atque extenſionem aliquam habere poſſit, quod quidem mille geometricis argumentis evinci poteſt. Sic in fig.260 ſi geometrica conſtructione inveſtigaremus tertiam poſt RI, & RA, vel poſt RE, F.260 & RA, abeunte R in V, & factis RI, RE abſolutè infinitis, facile ſane inveniretur, utramque abire in verum, & abſolutum nihilum. Porro facile & illud patet, tertias illas poſt RI, vel RE, & eandem RA fore reciprocè, ut ipſas RI, RE. Quamobrem abeuntibus in infinitum abſolutum binis rectis, ſi eæ finitam aliquam rationem haberent ad ſe invicem, vel ut hic etiam in infinitum vel auctam, vel imminutam; eandem

dem eſſe inter ipſa nihila rationem oporteret, & in ipſa extenſione aliquod nihil deberet eſſe magis nihil, immo & infinities magis nihil, quam aliud nihil, quod quidem, quam pugnet cum nitidiſſima illa nihili idea, quæ menti humanæ cuilibet ſe præſens ſiſtit, nemo non videt.

884. Sunt quidem, qui in infinito, ajunt, neque æqualitatis, neque totius, & partis nomen admitti poſſe. At id quidem erit, non difficultatem, ſed uſum ſermonis tollere, ne redarguaris, ut ſi quis omnium idiomatum uſum adimeret. Debent ſane illa vocabula admitti etiam ibi, cum idea, quæ nobis clariſſima iis reſpondet nominibus ab infiniti ratione non pendeat. Quocumque utaris nomine, ultra illam rectam, quæ extenditur, quantum extendi poteſt ſine ullo limite, nihil eſſe poteſt, quo eadem recta, adjecta ipſi ad latus altera potius curva, quam altera, & cum altera potius conditione, quam cum altera, excreſcat jam, & producatur. Si bina quæcumque ſint ejuſmodi, ut in altero ſit, quidquid habetur in altero, & præterea aliquid, quod in eo non habetur; hoc ſane, ſive finitum ſit, ſive infinitum, habebit id, quod concipimus, cum dicimus, majorem eſſe, & cum dicimus, eſſe totum reſpectu ſuarum partium, quarum altera erit id, quod commune eſt, altera id, quod ipſi accedit. Majus autem adhuc ſemper erit totum ſua parte, & pars ipſi toto æqualis eſſe non poterit, multo vero minus poterit eſſe major. Idem quodpiam eidem in hoc ſenſu ipſo, ſive finitum ſit, ſive infinitum, & æqua-

æquale ſimul, & majus, & minus eſſe non poterit. At eſſet, ac extenſiones abſolutè infinitæ, ut & ſeries abſolutè infinitæ, ſi eas inter ſe diverſa ratione comparaveris, eædem ſane iiſdem & majores ſimul erunt, & æquales, & minores, quod mille argumentis evincitur. Illud igitur dicendum potius, quantitatem nullam exiſtere poſſe, qnæ finita non ſit, quam ejuſmodi appellationes infinito non convenire; & quæcumque contradictionem involvunt, abſurda dicenda ſunt, quæ impoſſibilem exiſtentiam evincant, non myſteria tantummodo, quæ finitæ mentis captum tranſcendant.

885. Ac nobis quidem conſiderantibus, unde fiat, ut impoſſibilis ſit quantitas infinita, occurrit illud, quod infinitum ſummam ſimplicitatem, & unitatem requirat, quæ a ſumma infiniti perfectione nequaquam ſejungi poſſit, quantitas autem partibus omnino conſtare debeat, & compoſitionem expoſcat. Si linea in infinitum ex utraque parte excurrat; invenimus, in illa infinita diſtantia eam quodammodo copulari, atque conjungi, & in orbem redire debere, ut & infinita Hyperbolæ, ac Parabolæ crura a ſe invicem per infinitum tractum divulſa, ibidem quodammodo conjungi, tanquam ſi illa infinita diſtantia jam eſſet nulla. Ille infinitus hiatus Parabolæ in fig.270 licet æqualis infinitæ tangenti, debet eſſe quoddam veluti punctum iuxta num. 741, quo motus continuus puncti P nequaquam interrumpatur. Æquivalere debet unico illi puncto, in quod centrum Ellipſeos, quod erat unicum punctum, abiiſſe, F.270

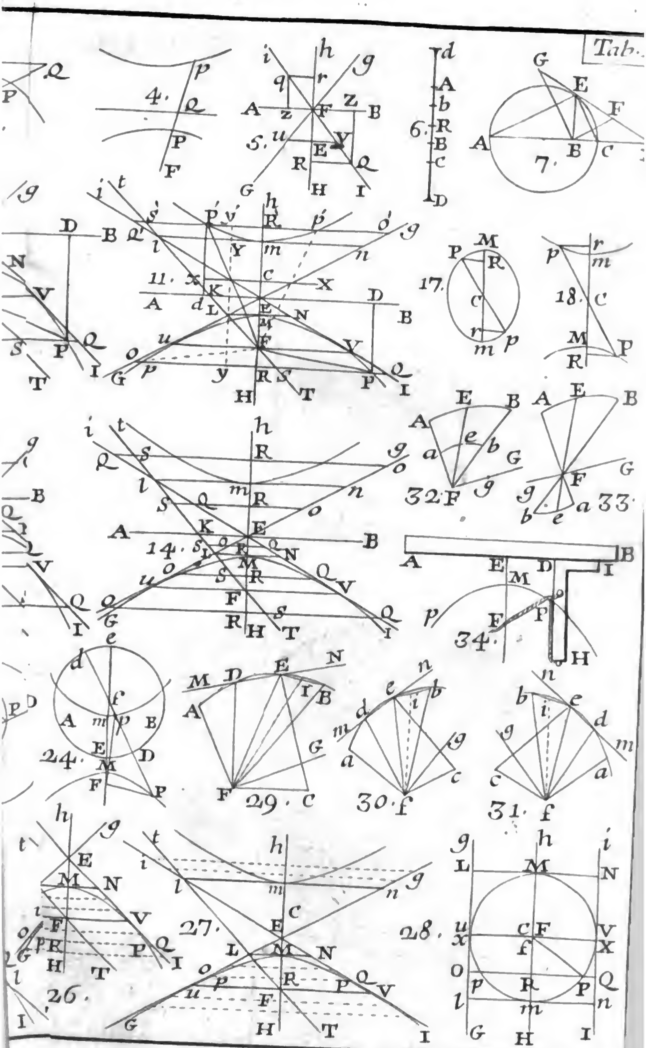
ſe, cenſendum eſt. Omnes nimirum diametri in Ellipſi ad centrum convergunt, & in eo conjunguntur. Eædem in Parabola terminari debent ad infinitum cruribus illis infinitis concluſum, quod illi unico puncto æquivalet. Dum punctum H eſt extra H2, utravis e parte ſit, punctum P eſt in altero ramo, punctum A1, A3 ultra ipſum excurrit: & unico momento, ſeu puncto temporis, quo H eſt in H2, utrumque ad partes A2 debet eſſe in omni eo infinito ſpatio, in quo, ut diximus, terminari debent omnes illæ diametri, quæ ibidem ſecum invicem, & cum axe, & cum ipſa recta gyrante ſimul ſingulæ coire deberent quodammodo, ut etiam parallelarum quarumcumque concurſus in infinito quodammodo deliteſcit. En igitur infinitum ſpatium concluſum cruribus infinitis, quod licet æquale ſit rectæ toti utrinque in infinitum extenſæ; tamen unius puncti prorſus indiviſibilis naturam affectat, quod cum illa infinita diſtantia, quæ debeat quodammodo evadere nulla tum, cum infinitum attingitur, mirum in modum conſentit. Nec in eo tantummodo ſpatio, quod reſpectu infinitæ pereripheriæ deberet eſſe, ut punctum quoddam, ejuſmodi unitatem, ſimplicitatem, indiviſibilitatem infiniti natura requirit, ſed etiam in univerſa ipſa infinita periphæria, & per eam in univerſa infinitæ veluti ſphæræ ſuperficie, quæ a dato quovis puncto quaquaverſum extenditur in infinitum. Nam ubi Ellipſis per Parabolam in Hyperbolam migrat, concurſus ille ſemidiametrorum omnium, quæ ex parte cava concurrebant in unico centro, diffun-

fuditur quodammodo per totos illos circuli quaquaverſum infiniti arcus, qui intercipiuntur iis aſymptotorum angulis, quos axis tranſverſus ſecat, qui ad totam infinitam peripheriam ſunt, ut ii anguli ad quatuor rectos. Quævis enim recta in Hyperbola a finito ejus centro egreſſa in iiſdem angulis jacens incurrit in perimetrum hinc, & inde, ultra quam protenditur ex parte cava in infinitum, atque illud invenit infinitum centrum Hyperbolæ analogum finito Ellipſeos centro, & illum axem conjugatum offendit, qui pariter finito axi Ellipſeos conjugato reſpondens Hyperbolam dividit in binos infinitos ramos verſus ſe cavos, & ſuis ſingulos focis præditos, ut axis conjugatus Ellipſeos finitus ipſam dividit in duas ejuſmodi finitas ſemiellipſes. Succedunt igitur ii arcus infiniti unico centro indiviſibili Ellipſeos, & ejus naturam affectant. Si jam bini accedant Hyperbolæ conjugatæ rami, ipſi reliquum omne, quod in reliquis aſymptotorum angulis ſupereſt, in unicum pariter punctum nitentur contrahere, ut jam debeat quodammodo infinita omnis peripheria circuli circa Hyperbolæ centrum circumquaque infiniti affectare unici indiviſibilis puncti naturam. Atque id ipſum pertinebit ad omnem ſuperficiem ſphæræ pariter infinitæ, ſi Hyperbolæ planum circa axem conjugatum gyrando integram converſionem abſolvat, & illa infinita peripheria puncto quodammodo æquivalens, infinitæ ipſius ſphæræ ſuperficiem producat, quæ tota eo ipſo, quod infinita ſit, puncti naturam ſimplicitatem, indiviſibilitatem requirat; cumque eam ha-

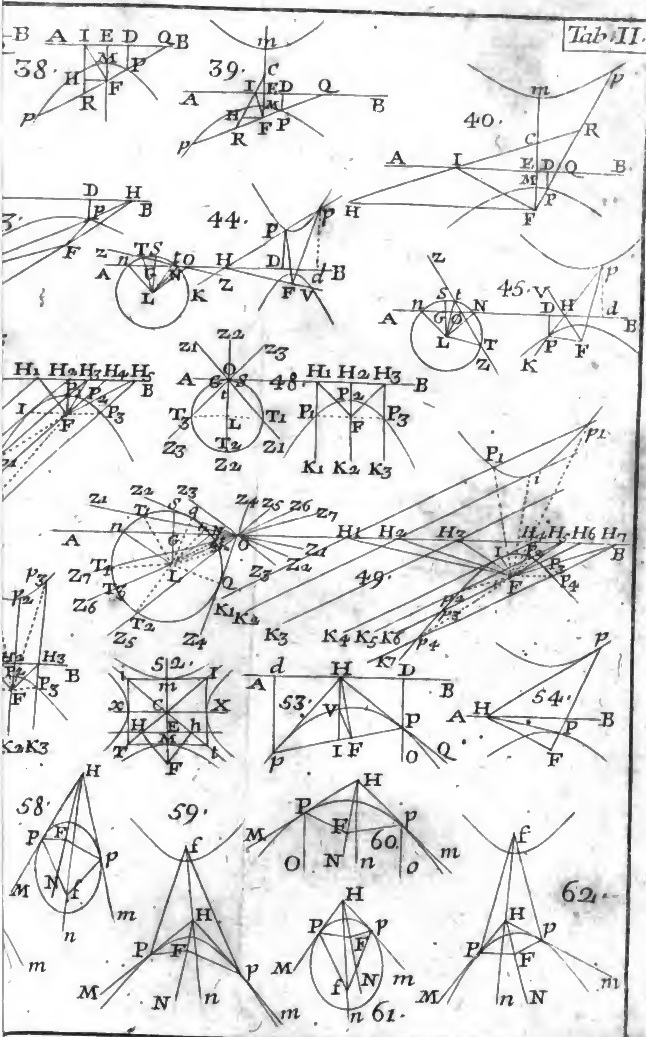
habere omnino non poſſit, ſed in immenſum augere debeat, ex ipſa quantitatis natura ſibi inhærente, compoſitionem, atque diviſibilitatem, & partes; dum duo ita contraria inter ſe conjungere, & copulare veluti ſtudet, contradictionem involvat, neceſſe eſt, & impoſſibilis omnino ſit.

886. Atque hoc demum pacto licebit etiam e geometricis hiſce meditationibus mentem attollere, ac Divinæ Immenſitatis ſimplicitatem ſummam admirari, quæ ab omni partium compoſitione alieniſſima, cum ſumma Naturæ ſimplicitate, atque unitate ſummi infiniti naturam conjungit, & perfectiones omnes miro, atque inexplicabili nexu conjunctas complectitur. Infinitam venerabimur majeſtatem perculſi, atque attoniti, ac hærebimus admirabundi infinitam illam animo pervolventes mentis infinitæ vim, qua & haſce ipſas harum curvarum proprietates tam multas, tam varias, tam miras, quas nos tam longa ratiocinatione, ac deductione tam moleſta perſequitur, una cum aliis infinitis infinities magis arduis, atque mirificis, & pulcherrimis, atque elegantiſſimis ſublimiorum curvarum proprietatibus, unico intuitu, ac ſimpliciſſima cognitione perſpicit, & penitus comprehendit.

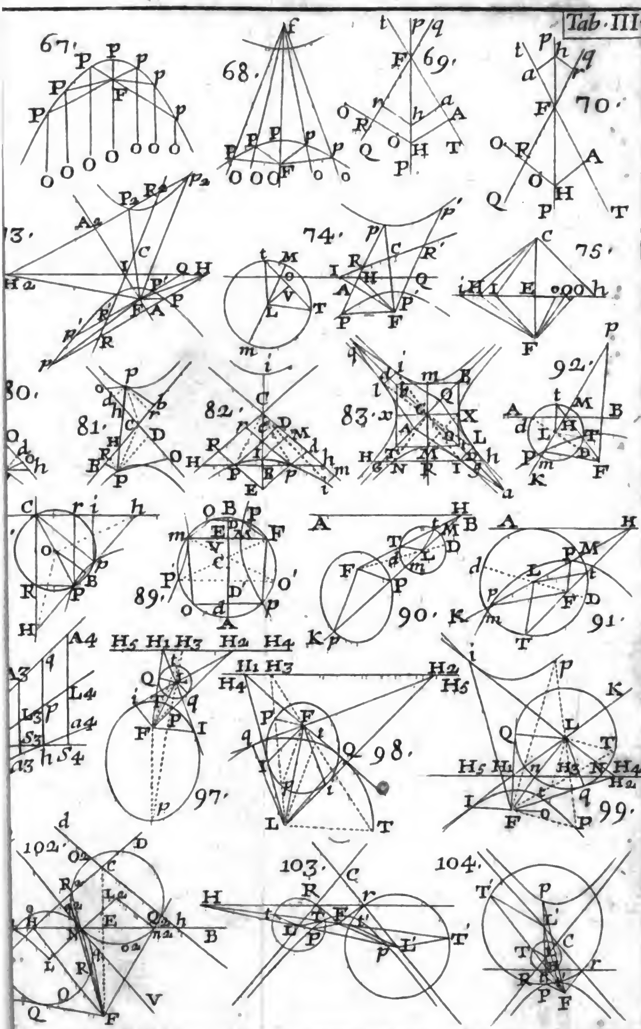
F I N I S.

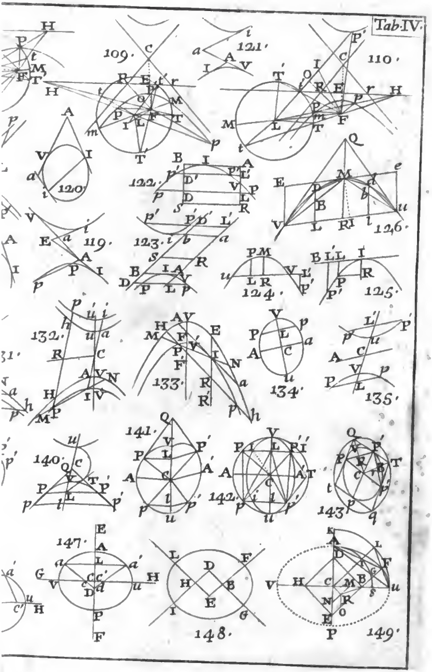

Tab.

Tab. II.

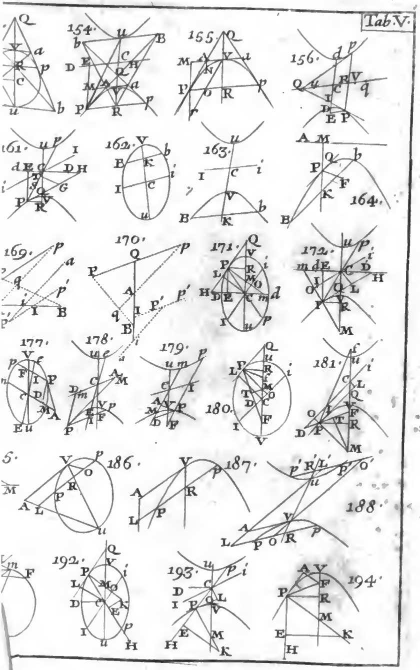


Tab. III

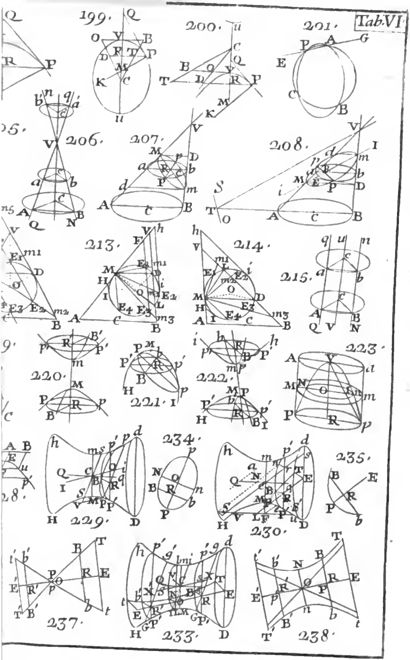




Digitized by Google

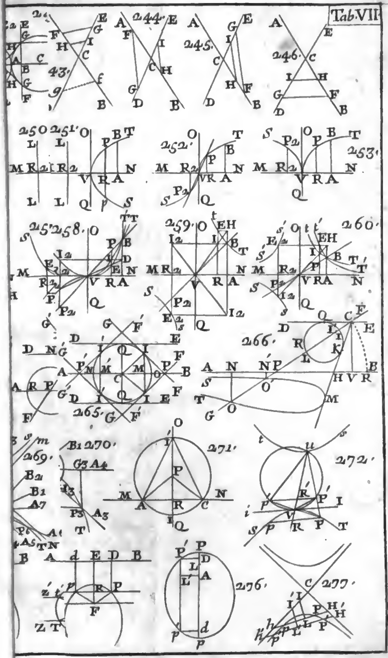

Tab. V.
154.
155.
156.
161.
162.
163.
164.
169.
170.
171.
172.
177.
178.
179.
180.
181.
186.
187.
188.
192.
193.
194.

Digitized by Google


Tab. VI
199.
200.
201.
206.
207.
208.
213.
214.
215.
220.
221.
222.
223.
229.
230.
234.
235.
237.
233.
238.

Digitized by Google

Tab. VII



Digitized by Google

Digitized by Google